§5: ABBILDUNGEN

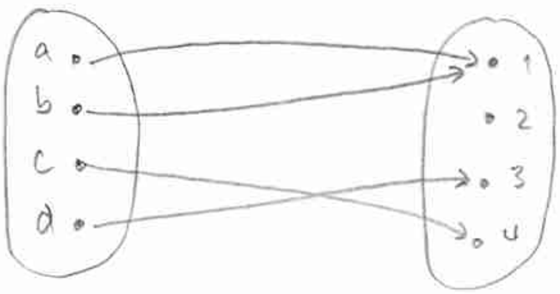
5.1. Def.: Eine Abbildung zwischen zwei Mengen M und N ist eine Vorschrift

$$f: M \to N$$

die jedem Element $x \in M$ ein Element $f(x) \in N$ zuordnet.

Schreibweise: $x \mapsto f(x)$.

5.2. Beispiel: $M = \{a, b, c, d\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$



$a \mapsto f(a) = 1$

5.3. Wichtige Begriffe

Für eine Teilmenge $A \subset M$ heißt $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subset N$ das Bild von A. Die

Für $B \subset N$ heißt $f^{-1}(B) := \{x \in M \mid f(x) \in B\}$ das Urbild von B.

Im Beispiel 5.2:

$$f(\{a,b\}) = \{1\},$$
$$f(\{a,c\}) = \{1,3\}$$
$$f^{-1}(\{3\}) = \{d\}$$
$$f^{-1}(\{2\}) = \emptyset.$$

Hat B nur ein Element, $B = \{y\}$, dann setzt man $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$

Ist $f: M \to N$ eine Abbildung und $A \subset M$, dann heißt

$$f|_A : A \to N, \quad A \ni x \mapsto f(x)$$

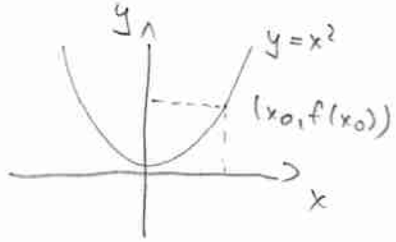
die <u>Einschränkung</u> von f auf A.

Die Relation

$$\Gamma_f := \{(x,y) \in M \times N \mid y = f(x)\}$$

heißt <u>Graph</u> von f.

Bsp.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$



5.4 Zu den wichtigsten Abbildungen zählen reelle Funktionen

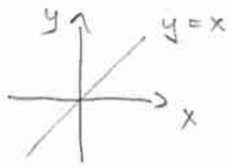
$$f: D \to \mathbb{R}$$

mit einer nichtleeren Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$, dem <u>Definitionsbereich</u>.

5.5. <u>Beispiele</u>

a) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$

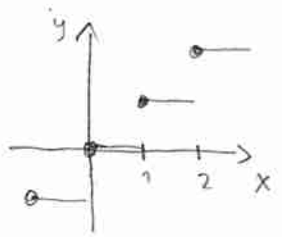
<u>identische Abbildung</u>



b) <u>entier-Funktion</u>:

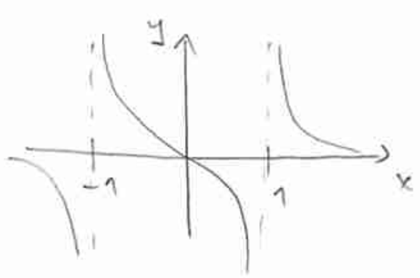
entier : $\mathbb{R} \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

entier (x) = größte ganze Zahl $\leq x$



c) $f: D \to \mathbb{R}$: $f(x) := \dfrac{x}{x^2 - 1}$

mit $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.



5.6. Def.:

Eine Abbildung $f: M \to N$ heißt

- <u>surjektiv</u>, wenn es für alle $y \in N$ ein $x \in M$ gibt mit $f(x) = y$
  (d.h. $f(M) = N$, „Abbildung <u>auf</u> N")

- <u>injektiv</u> (<u>eineindeutig</u>), wenn keine zwei verschiedenen Elemente von M auf das selbe Element von N abgebildet werden:
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

- <u>bijektiv</u>, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

5.7. <u>Beispiele</u>

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist
- nicht surjektiv: z.B. hat -1 kein Urbild
- nicht injektiv: z.B. ist $f(2) = 4 = f(-2)$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $x \mapsto x^2$
ist surjektiv, aber nicht injektiv

c) $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist
injektiv, aber nicht surjektiv

d) $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2$ ist
injektiv und surjektiv, also bijektiv.

Bijektive Abbildungen kann man umkehren:

5.8. Def.: Ist eine Abbildung $f: M \to N$ bijektiv, so heißt die Abbildung

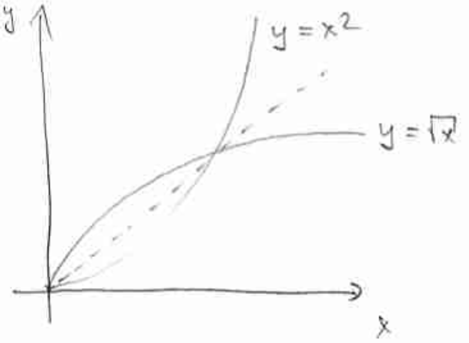
$$f^{-1}: N \to M, \quad y \mapsto x \text{ mit } y = f(x)$$

die <u>Umkehrabbildung</u> von f.

5.9. <u>Beispiel</u>

$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto x^2$ hat die Umkehrabbildung

$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto \sqrt{x}$



Abbildungen lassen sich miteinander verknüpfen:

5.10. Def.: Sind $f: A \to B$ und $g: B \to C$ Abbildungen, so heißt die Abbildung

$$g \circ f: A \to C, \quad x \mapsto g(f(x))$$

die <u>Komposition</u> (<u>Verknüpfung</u>, <u>Hintereinanderschaltung</u>) von f und g.

Sprechweise: „g Kringel f",

5.11. <u>Satz:</u> (Assoziativität der Verknüpfung)

Seien $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ Abbildungen, so gilt:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

d.h. die Komposition ist assoziativ

<u>Beweis:</u> Ist $x \in A$, so gilt

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= h((g \circ f)(x)) \\ &= (h \circ (g \circ f))(x) \end{aligned}$$

□.

5.12. <u>Vorsicht:</u> Die Komposition von Abbildungen ist i.A. <u>nicht</u> kommutativ!

Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x+1$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(x^2) = x^2 + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

d.h. $f \circ g \neq g \circ f$.

Die Komposition kann auch zum Nachweis von Injektivität, Surjektivität und Bijektivität dienen:

5.13. Satz (Kriterium für Injektivität, Surjektivität, Bijektivität):

Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung zwischen den nichtleeren Mengen X und Y. Dann gilt.

a) f injektiv $:\Longleftrightarrow \exists\, g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$.

b) f surjektiv $\Longleftrightarrow \exists\, g: Y \to X$ mit $f \circ g = id_Y$

c) f bijektiv $\Longleftrightarrow \exists\, g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$.

In diesem Fall ist g die Umkehrabb. f^{-1}.

Beweis:

a) „$\Rightarrow$" Sei f injektiv. Dann ex. zu jedem $y \in f(X)$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Setze $g(y) := x$.

Für alle $y \in Y \setminus f(X)$ setzen wir $g(y) := x_0$ mit $x_0 \in X$ beliebig.

Dann ist $g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$.

„$\Leftarrow$" Sei $g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$ gegeben.

Sei ferner $f(x_1) = f(x_2)$.

$\Rightarrow \quad x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$

$\Rightarrow$ f ist injektiv

b) „$\Rightarrow$" Sei f surjektiv. Zu jedem $y \in Y$ wählen wir ein festes $x \in X$ mit $f(x) = y$ und setzen $g(y) := x$.

Dann hat $g: Y \to X$ die Eigenschaft $f \circ g = id_Y$.

„$\Leftarrow$" Sei $g: Y \to X$ mit $f \circ g = id_Y$ gegeben. Sei $y \in Y$.

$\Rightarrow$ $y = f(g(y))$, d.h. $y \in f(X)$. Also ist f surjektiv.

c) „⇒" Sei f bijektiv. Dann ex. nach (a) und (b) eine Abb. $g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$.

„⇐" Sei $g: Y \to X$ mit $g \circ f = id$ und $f \circ g = id_Y$ gegeben. Dann ist f nach (a) und (b) injektiv und surjektiv, d.h. bijektiv.

Ferner erfüllt g die Def. 5.8 der Umkehrabb. von f: $g = f^{-1}$. □.

5.14. Mächtigkeit von Mengen

Eine Menge M heißt endlich, falls ein $n \in \mathbb{N}_0$ ex. und eine bijektive Abb. $f: \{1, \dots, n\} \to M$.
n ist eindeutig bestimmt und heißt die Mächtigkeit (Kardinalzahl) von M. Schreibweise: $|M| = n$.
Man kann die Elemente von M aufzählen:
$M = \{m_1, \dots, m_n\}$, wobei $f(i) = m_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$.
Ist M nicht endlich, so heißt M unendlich.

Zwei Mengen sind gleichmächtig, falls eine bijektive Abb. zwischen ihnen existiert.

Wir nennen eine Menge M abzählbar, wenn eine bijektive Abb. $f: M \to \mathbb{N}$ existiert. Als Symbol für die Kardinalzahl $|\mathbb{N}|$ benutzen wir $\aleph_0$ („aleph 0").

5.15. Beispiele

a) $|\{5,7,2,9\}| = 4$

b) $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$, denn mit $\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$ ergibt sich eine Aufzählung mit der bijektiven Abb.:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{für gerades } n \\ -\frac{n-1}{2} & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

5.16. Satz: (Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$)

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar: $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Beweis: (Cantor)

Wir beschränken uns zunächst auf $\mathbb{Q}^+ := \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$.

Die Elemente von $\mathbb{Q}^+$ lassen sich in folgendem Schema anordnen:

$$\begin{array}{lccccc}
(\text{Nenner } 1) & 1 \longrightarrow & 2 & 3 \longrightarrow & 4 & \ldots \\
(\text{Nenner } 2) & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \ldots \\
(\text{Nenner } 3) & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \ldots \\
 & \frac{1}{4} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & \downarrow & & & &
\end{array}$$

Durch Weglassen doppelter Elemente in diesem Polygonzug entsteht die Anordnung

$$1,\ 2,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ 3,\ 4,\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \ldots$$

die sich bijektiv auf $\mathbb{N}$ abbilden läßt.

Analog wie in 5.15 (b) läßt sich der Beweis auf ganz $\mathbb{Q}$ ausdehnen. $\square$

Bem.: Nicht alle unendliche Mengen sind gleichmächtig.
z.B. ist $\mathbb{R}$ überabzählbar (d.h. nicht abzählbar)

5.17 Satz (Äquivalenz von Surjektivität und Injektivität)
Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung zwischen endlichen, gleichmächtigen Mengen X und Y. Dann sind äquivalent:

a) f ist injektiv.
b) f ist surjektiv.
c) f ist bijektiv

Beweis:

Wegen der Def. der Bijektivität genügt es, (a) $\Leftrightarrow$ (b) zu zeigen.

„(a) $\Rightarrow$ (b)":
Sei $f: X \to Y$ injektiv
$\Rightarrow$ $|f^{-1}(y)| \leq 1 \quad \forall y \in Y$ (einige $y \in Y$ könnten kein Urbild haben)
$\Rightarrow$ $|X| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)| \leq \sum_{y \in Y} 1 = |Y|$
Wegen $|X| = |Y|$ muss $|f^{-1}(y)| = 1 \ \forall y \in Y$ gelten.
$\Rightarrow$ f ist surjektiv, da jedes El. in Y zu $f(X)$ gehört.

„(b) $\Rightarrow$ (a)":
Sei $f: X \to Y$ surjektiv. $\Rightarrow |f^{-1}(y)| \geq 1 \ \forall y \in Y$ (mehrere Urbilder möglich)
$\Rightarrow$ $|Y| = \sum_{y \in Y} 1 \leq \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)| = |X|$

Wegen $|X| = |Y|$ muss $|f^{-1}(y)| = 1 \quad \forall y \in Y$ gelten.
$\Rightarrow$ f ist injektiv, da keine zwei El. aus X auf das selbe $y \in Y$ abgebildet werden.
$\square$

5.18. Folgerungen

Aus dem Beweis von 5.17 folgt für endliche Mengen X, Y:

a) Ist $f: X \to Y$ injektiv, dann ist $|X| \leq |Y|$.

b) Ist $f: X \to Y$ surjektiv, dann ist $|X| \geq |Y|$.

Die Kontraposition zu (a) ergibt:

5.19. Satz (Schubfachprinzip)

Seien X, Y endliche Mengen. Dann ist eine Abbildung $f: X \to Y$ mit $|X| > |Y|$ nicht injektiv.

Anders formuliert:

Seien m Objekte in n Kategorien („Schubfächer") eingeteilt. Wenn $m > n$ ist, gibt es mindestens eine Kategorie, die mindestens 2 Objekte enthält.

5.20. Beispiele

a) Unter 13 Personen gibt es mindestens 2, die im selben Monat Geburtstag haben.

b) In jeder Gruppe von mindestens zwei Personen gibt es zwei, die die gleiche Anzahl von Bekannten innerhalb dieser Gruppe haben.

Beweis:

Wir nehmen an, dass „bekannt" eine symmetrische, nicht reflexive Relation ist.

Objekte: Personen der Gruppe. Ann.: m Personen

Kategorie: Personen mit gleichen Zahl von Bekannten:

$K_0, K_1, \dots, K_{m-1}$: Personen mit $0, 1, \dots, m-1$ Bekannten.

Schubfachprinzip nicht direkt anwendbar, da Objektzahl m identisch mit Kategorienzahl.

Es gibt jedoch eine Kategorie, die nicht auftritt:

Denn: Angenommen eine Person ist in K_{m-1}

$\Rightarrow$ Sie kennt alle anderen.

$\Rightarrow$ Alle anderen haben mindestens einen Bekannten

$\Rightarrow$ K_0 ist leer.

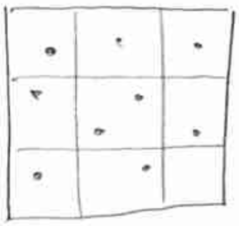
Wenn keine Person in K_{m-1} ist, ist K_{m-1} leer.

Also ist das Schubfachprinzip anwendbar. $\square$

c) Für beliebige n^2+1 Punkte im Quadrat

$Q = \{(x,y) \mid 0 < x < n,\ 0 < y < n\}$

gibt es zwei mit Abstand $\leq \sqrt{2}$.



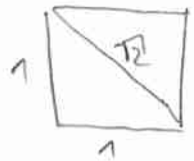
$n = 3$, 10 Punkte

Beweis: Betrachte Teilquadrate

$Q_{i,j} = \{(x,y) \mid i-1 \leq x < i,\ j-1 \leq y < j\}$

Nach dem Schubfachprinzip müssen in einem der n^2 Fächer mindestens zwei Punkte liegen.

Der Maximalabstand in einem solchen Einheitsquadrat ist $\sqrt{2}$.



$\square$