§4: RELATIONEN

4.1. Motivation

Wir möchten

- die Elemente zweier Mengen in Beziehung setzen
- eine Menge so unterteilen, dass „ähnliche" Elemente in der selben Klasse liegen
- die Elemente innerhalb einer Menge ordnen.

In der Informatik sind solche Fragen z.B. bei relationalen Datenbanken wichtig.

4.2. Seien A, B nichtleere Mengen. Eine Relation auf $A \times B$ ist eine Teilmenge $R \subset A \times B := \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$.
Für $(x,y) \in R$ sagt man: „x steht in Relation R zu y". Man schreibt auch: $x R y$.

4.3. Beispiel:

a) $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$

$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$

sind Relationen auf $\mathbb{R}^2$.

b) Sei S Menge der Studierenden der UdS. und F die Menge der Studiengänge. Dann ist

$B = \{(s,f) \mid s$ belegt den Studiengang $f\}$

eine Relation auf $S \times F$.

In relationalen Datenbanken werden Datensätze durch derartige Relationen charakterisiert.

4.4. Def.: Eine Relation $R \subset A \times A$ heißt

- reflexiv, falls $x R x \quad \forall x \in A$.
- symmetrisch, falls $x R y \Rightarrow y R x \quad \forall x, y \in A$
- transitiv, falls aus $x R y$ und $y R z$ stets $x R z$ folgt.

Ist eine Relation R reflexiv, symmetrisch und transitiv, so heißt sie Äquivalenzrelation.
Man schreibt auch $x \sim y$ statt $x R y$.

4.5. Beispiele

a) Sei A die Menge aller Einwohner von Deutschland. Wir definieren die Relation

$x R y :\Leftrightarrow$ x und y haben ihren ersten Wohnsitz in der selben Stadt.

Dann ist R eine Äquivalenzrelation.

b) $A := \mathbb{Z}$. Betrachte die Relation

$$R_5 :=: \{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x-y \text{ ist ohne Rest durch } 5 \text{ teilbar} \}$$

Dann gilt.

i) $x R_5 x \quad \forall x \in \mathbb{Z}$, da $x - x = 0$ durch 5 teilbar ist (Reflexivität)

ii) Sei $x R_5 y$. $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \; x - y = 5k$
$\Rightarrow y - x = 5 \cdot (-k)$
$\Rightarrow y R_5 x$. (Symmetrie)

iii) Sei $x R_5 y$ und $y R_5 z$.
$\Rightarrow x - y = 5k, \; y - z = 5l \Rightarrow x - z = (x-y) + (y-z) = 5(k+l)$
d.h. $x R_5 z$ (Transitivität).

Damit ist R_5 eine Äquivalenzrelation.

c) $A := \mathbb{R}$.

$R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$.

R ist keine Äquivalenzrelation, da nicht reflexiv und nicht symmetrisch.

Äquivalenzrelationen erlauben eine Einteilung in Klassen:

4.6. Def.: Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A und $a \in A$.

Dann heißt

$$[a] := \{x \in A \mid x \sim a\}$$

die <u>Äquivalenzklasse</u> von a. Die Elemente von $[a]$ heißen die zu a <u>äquivalenten</u> Elemente.

4.7. <u>Beispiel</u>

Sei R_5 definiert wie in 4.6.(b). Dann ist

$$[a] := \{x \in \mathbb{Z} \mid x - a \text{ ist durch } 5 \text{ teilbar}\}.$$

Insbesondere gilt

$$[0] := \{0, 5, 10, 15, \ldots, -5, -10, -15, \ldots\}$$

$$[1] := \{1, 6, 11, 16, \ldots, -4, -9, -14, \ldots\}$$

$$[2] := \{2, 7, 12, 17, \ldots, -3, -8, -13, \ldots\}$$

$$[3] := \{3, 8, 13, 18, \ldots, -2, -7, -12, \ldots\}$$

$$[4] := \{4, 9, 14, 19, \ldots, -1, -6, -11, \ldots\}$$

Offenbar gilt: $[5] = [0]$, $[6] = [1], \ldots$

Man nennt $\mathbb{Z}_5 := \{[0], [1], \ldots, [4]\}$ die <u>Restklassen</u> von $\mathbb{Z}$ modulo 5.

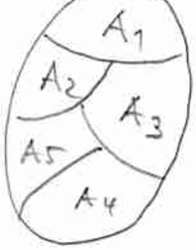
Es gilt $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$ und $[0], \ldots, [4]$ sind disjunkt. Ist dies Zufall?

4.8. Def.: Eine Partition einer Menge A ist eine Menge $P = \{A_1, A_2, \dots\}$ von nichtleeren Teilmengen von A mit

a) $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ für $i \neq j$

b) $\bigcup_i A_i = A$.

Man schreibt auch: $A = \dot{\bigcup_i} A_i$



4.9. Satz (Partitionseigenschaft von Äquivalenzklassen)

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Dann bildet die Menge der Äquivalenzklassen eine Partition von A.

Beweis:

a) Seien A, B Äquivalenzklassen. Durch Kontraposition zeigen wir:

Falls $A \neq B$, sind A, B disjunkt

Seien also A, B nicht disjunkt: $A \cap B \neq \emptyset$

Seien $[a] = A$, $[b] = B$, und $y \in A \cap B$.

Um $A = B$ zu zeigen, beweisen wir „$A \subset B$" und „$B \subset A$":

„$A \subset B$":
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{Sei } x \in A \Rightarrow x \sim a \\ \text{Da } y \in A \Rightarrow y \sim a \Rightarrow a \sim y \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{trans.}} x \sim y \\ \text{Wegen } y \in B: \Rightarrow y \sim b \end{array}\right\} \Rightarrow x \sim b \text{ d.h. } x \in B.$$

„$B \subset A$": geht ganz genau so.

b) Für jedes $x \in A$ ist $x \in [x]$ (wg. Reflexivität).

$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} [x]$.

□

Eine Äquivalenzrelation verhält sich im Prinzip wie $=$.
Wie lassen sich Relationen charakterisieren, die sich im Prinzip wie $\leq$ verhalten, d.h. als Ordnungsrelationen wirken?

4.10.

29.10.'03

Def.: Sei $A \neq \emptyset$. Eine Relation $R \subset A \times A$ heißt Teilordnung auf A, wenn gilt:

a) R ist reflexiv: $xRx \quad \forall x \in A$

b) R ist transitiv: $xRy,\ yRz \Rightarrow xRz \quad \forall x,y,z \in A$.

c) R ist antisymmetrisch: $xRy,\ yRx \Rightarrow x = y \quad \forall x,y \in A$.

Ferner heißt R total, wenn xRy oder yRx für alle $x,y \in A$ gilt. (d.h. wenn x und y vergleichbar sind).
Eine totale Teilordnung nennen wir auch (Total-) Ordnung.

4.11. Beispiele

a) Die Relation „$\leq$" definiert eine Teilordnung auf $\mathbb{R}$.

a) $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

c) $x \leq y,\ y \geq x \Rightarrow x = y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$.

Da $x \leq y$ oder $y \leq x$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$, ist $\leq$ eine (totale) Ordnung.

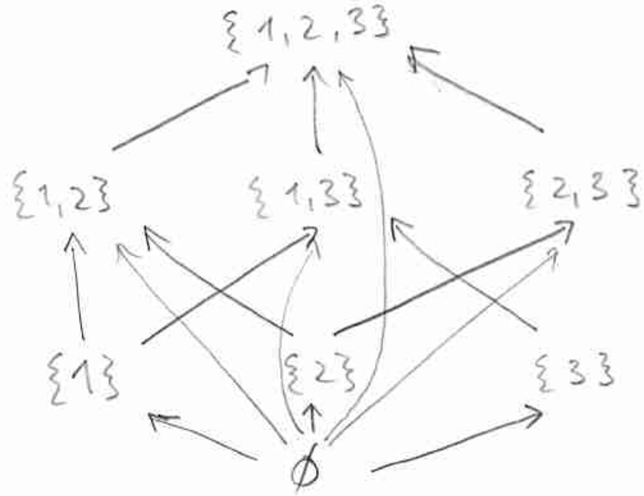
b) Sei M eine Menge.
Betrachte Relation $\subset$ auf der Potenzmenge $P(M)$
Dann ist $\subset$ eine Teilordnung:

i) $A \subset A \quad \forall A \in P(M)$

ii) $A \subset B,\ B \subset C \Rightarrow A \subset C \quad \forall A,B,C \in P(M)$

iii) $A \subset B,\ B \subset A \Rightarrow A = B \quad \forall A,B \in P(M)$.

Beispiel: $M = \{1,2,3\}$



Dabei symbolisiert $\rightarrow$ die Relation $\subset$.

Allerdings ist $\subset$ keine Totalordnung, da es nicht vergleichbare Elemente in $P(M)$ gibt:
z. B. sind $\{2\}$ und $\{1,3\}$ nicht vergleichbar.

c) Sei M die Menge der englischen Wörter mit 4 Buchstaben. Verwendet man die alphabetische Ordnung und vereinbart, dass Großbuchstaben vor Kleinbuchstaben kommen, liegt eine Totalordnung vor (<u>lexikographische Ordnung</u>)