# § 2: AUSSAGENLOGIK

Mein teurer Freund, ich rat' Euch drum
Zuerst Collegium Logicum.
Goethe, Faust I

## 2.1. Bedeutung in der Informatik

- Schaltkreisentwurf
- Verifikation
- automatisches Beweisen
- Anfragen an Suchmaschinen im Internet

## 2.2. Def.:

Eine Aussage ist ein Satz einer menschlichen oder künstlichen Sprache, dem eindeutig einer der Wahrheitswerte wahr (1) oder falsch (0) zugeordnet werden kann

## 2.3. Beispiele:

a) „Saarbrücken liegt am Rhein." (falsch)

b) „$3 < 5$" (wahr)

## 2.4: Verknüpfung von Aussagen:

Wir definieren die Verknüpfungen

$\neg A$: „nicht A" (Negation)

$A \wedge B$: „A und B" (Konjunktion)

$A \vee B$: „A oder B" (Disjunktion)

$A \Rightarrow B$: „aus A folgt B" (Implikation)

$A \Leftrightarrow B$: „A äquivalent zu B" (Äquivalenz) mittels der Wahrheitswertetafel

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

## 2.5. Anmerkungen

a) $A \vee B$ ist auch wahr, wenn $A$ und $B$ wahr sind (kein „entweder .. oder")

b) Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist immer wahr, wenn die Prämisse (das ist Aussage $A$) falsch ist.

Aus falschen Aussagen können also auch wahre Aussagen folgen:

Bsp.: „$1 = -1$" ist falsch.

Quadrieren liefert die wahre Aussage „$1 = 1$".

c) $A \Rightarrow B$ ist nicht das selbe wie $B \Rightarrow A$.

Bsp.: $A$: „Das Tier ist ein Dackel".

$B$: „Das Tier ist ein Hund".

$A$ impliziert $B$, aber $B$ impliziert nicht notwendigerweise $A$.

2.6.: Def.: Ein logischer Ausdruck ist eine Tautologie, wenn sich für alle Kombinationen der Argumente eine wahre Aussage ergibt.

2.7. Beispiel

$$(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

denn es gilt:

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \Rightarrow \neg B$ | $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

2.8. Satz (Wichtige Tautologien)

a) $A \vee \neg A$ Satz vom ausgeschlossenen Dritten

b) $\neg(A \wedge \neg A)$ Satz vom Widerspruch

c) $\neg(\neg A) \iff A$ doppelte Verneinung

d) $(A \wedge B) \iff (B \wedge A)$
$(A \vee B) \iff (B \vee A)$ } Kommutativgesetze

e) $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ } Distributivgesetze

f) $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$ } de Morgan'sche Gesetze

g) $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$ Kontraposition (siehe 2.7)

h) $(A \Rightarrow B) \iff \neg A \vee B$

i) $((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
$((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$ } Assoziativgesetze

j) $(A \vee A) \Leftrightarrow A$
$(A \wedge A) \Leftrightarrow A$ } Idempotenz

2.9. Beispiel

Mit Satz 2.8 zeigen wir

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

Beweis:

$$([(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

$\overset{(h)}{\Longleftrightarrow} (\neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \vee (A \Rightarrow C))$ $((x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y))$

$\overset{(f)}{\Longleftrightarrow} (\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow C)) \vee (A \Rightarrow C))$ (de Morgan)

$\overset{(h)}{\Longleftrightarrow} (\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee C)) \vee (\neg A \vee C))$ $((x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y))$

$\underset{(c)}{\overset{(f)}{\Longleftrightarrow}} ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg A \vee C)$ (de Morgan)

$\overset{(d)}{\Longleftrightarrow} ((A \wedge \neg B) \vee \neg A \vee (B \wedge \neg C) \vee C)$ (Kommut.)

$\overset{(e)}{\Longleftrightarrow} (\underbrace{(A \vee \neg A)}_{1} \wedge (\neg B \vee \neg A) \vee (B \vee C) \wedge \underbrace{(\neg C \vee C)}_{1})$ (Distr.)

$\overset{(a)}{\Longleftrightarrow} (1 \wedge (\neg B \vee \neg A) \vee (B \vee C) \wedge 1)$ $(A \vee \neg A \Leftrightarrow 1)$

$\Longleftrightarrow ((\neg B \vee \neg A) \vee (B \vee C))$ $(1 \wedge x \Leftrightarrow x)$

$\overset{(i),(d)}{\Longleftrightarrow} ((\neg B \vee B) \vee \neg A \vee C)$ (Assoz.+Kom.)

$\Longleftrightarrow (1 \vee \neg A \vee C)$

$\Longleftrightarrow 1$ $\square$

## 2.10. Quantoren

dienen der kompakten Schreibweise logischer Ausdrücke:

$\forall$ : für alle

$\exists$ : es existiert ein

( $\exists!$ : es existiert genau ein

$\nexists$ : es existiert kein )

Beispiel: $\forall x\ A(x)$ : für alle $x$ gilt Aussage $A(x)$

## 2.11. Negation von Aussagen

Negation vertauscht Quantoren $\forall$ und $\exists$, und sie negiert die Aussage.

$$\neg(\exists x\ A(x)) \Longleftrightarrow \forall x(\neg A(x))$$

$$\neg(\forall x\ A(x)) \Longleftrightarrow \exists x(\neg A(x))$$

Bsp.: „Alle Radfahrer haben krumme Beine."

Negation:

„Es gibt einen Radfahrer, der keine krummen Beine hat".

Bei komplizierteren Ausdrücken geht man sukzessive vor:

$$\neg(\exists y \forall x\, A(x,y)).$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall y\, \neg(\forall x\, A(x,y))$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall y\, \exists x\, \neg A(x,y)$$