# TEIL A: DISKRETE MATHEMATIK

## §1: MENGEN

Der Mengenbegriff ist von grundlegender Bedeutung in vielen Gebieten der Informatik, z.B. bei Datenbanken.

1.1. <u>Def.</u>: Unter einer <u>Menge</u> M verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten der Anschauung oder des Denkens, welche die <u>Elemente</u> von M genannt werden, zu einem Ganzen.

1.2. <u>Anmerkungen</u>

a) Dieser Mengenbegriff geht auf Georg Cantor (1845-1918) zurück. Er begründete die moderne Mengenlehre.

b) Er ist nicht unumstritten und widerspruchsfrei, genügt jedoch für unsere Anwendungen.

Bsp.: Der Barbier rasiert alle Menschen, die sich nicht selbst rasieren können.
Darf er sich selbst rasieren?

c) Die Elemente einer Menge werden in geschweiften Klammern eingeschlossen, z.B. $M = \{4, 1, 5\}$

d) Die Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle.

Wir unterscheiden also nicht zwischen $\{4, 1, 5\}$ und $\{1, 4, 5\}$

e) Symbole für wichtige Mengen

$\mathbb{N} := \{x \mid x \text{ ist natürl. Zahl}\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

„ist definiert durch"  „mit der Eigenschaft"

$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ nat. Zahlen mit 0.

$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} := \{x \mid x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$ rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$ : reellen Zahlen

$\emptyset, \{\}$ : leere Menge (enthält kein Element)

f) Mengen können wieder Mengen enthalten,

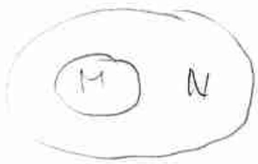
Bsp.: $M = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$ dreielementige Menge

1.3. Def.:

M heißt Teilmenge von N ($M \subset N$ oder $N \supset M$), wenn jedes Element in M auch Element in N ist:

$$x \in M \Rightarrow x \in N$$

Visualisierung durch sog. Venn-Diagramme:




Ist $M$ nicht Teilmenge von $N$, so schreibt man $M \not\subset N$.


$\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge $M$. (Warum?)
(Es gibt kein Element in $\emptyset$, das nicht zu $M$ gehört).

Zwei Mengen $N$ und $M$ sind <u>gleich</u> $(N=M)$, falls $N \subset M$ und $M \subset N$.

1.4. <u>Def.</u>: Ist $M$ eine Menge, so heißt

$$P(M) := \{ X \mid X \subset M \}$$

<u>Potenzmenge</u> von $M$.

Falls $N \subset M$ und $N \neq M$, schreibt man auch $N \subsetneq M$ „echt enthalten".

Beispiele:

a) $M = \{1,2\}$

$P(M) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \}$.

b) $M = \{a,b,c\}$

$P(M) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$

c) $M = \emptyset$

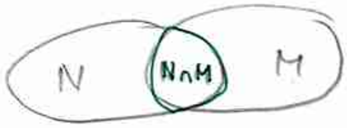
$P(M) = \{\emptyset\}$

(Die Potenzmenge einer $n$-elementigen Menge enthält $2^n$ Elemente.)

## 1.5. Operationen mit Mengen

Durchschnitt zweier Mengen M und N:

$$M \cap N := \{ x \mid x \in M \text{ und } x \in N \}$$




N und M heißen disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$ ist.

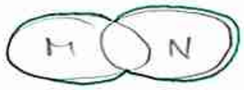
Bsp.: $M = \{1, 3, 5\}$, $N = \{2, 3, 5\}$, $S = \{5, 7, 8\}$

$M \cap N = \{3, 5\}$

$(M \cap N) \cap S = \{5\}$.

Vereinigung zweier Mengen M und N:

$$M \cup N := \{ x \mid x \in M \text{ oder } x \in N \}$$

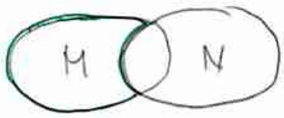



$M \cup N$

Dabei darf x auch in beiden Mengen sein („oder" ist kein „exklusives oder").

Differenzmenge:

$$M \setminus N := M - N := \{ x \mid x \in M \text{ und } x \notin N \}$$




$M \setminus N$

$M \setminus N$ heißt auch Komplement von N in M.

Schreibweise: $\overline{N}^M$

Wenn die Grundmenge M klar ist, schreibt man auch $\overline{N}$, $CM$ oder $M^c$

24.10.



1.6. Satz: (<u>Rechenregeln für Durchschnitte und Vereinigungen</u>

Seien M, N, S Mengen. Dann gelten folgende Gesetze:

a) <u>Kommutativgesetze</u>

i) $M \cup N = N \cup M$

ii) $M \cap N = N \cap M$

b) <u>Assoziativgesetze</u>

i) $(M \cup N) \cup S = M \cup (N \cup S)$

ii) $(M \cap N) \cap S = M \cap (N \cap S)$

c) <u>Distributivgesetze</u>

i) $M \cap (N \cup S) = (M \cap N) \cup (M \cap S)$

ii) $M \cup (N \cap S) = (M \cup N) \cap (N \cup S)$

Ferner gilt für jede Menge M: $M \cup \emptyset = M$
$M \cap \emptyset = \emptyset$
$M \setminus \emptyset = M$

<u>Beweis von (C)(i):</u>

Zeige $\underbrace{M \cap (N \cup S)}_{=:A} = \underbrace{(M \cap N) \cup (M \cap S)}_{=:B}$.

Um $A = B$ zu zeigen, zeigen wir $A \subset B$ und $B \subset A$.

a) „$A \subseteq B$":

Sei $x \in A$. $\Rightarrow$ $x \in M$ und ($x \in N$ oder $x \in S$).

Falls $x \in N$: $\Rightarrow$ $x \in M \cap N$

$\Rightarrow x \in (M \cap N) \cup (M \cap S) = B$.

Falls $x \in S$: $\Rightarrow$ $x \in M \cap S$

$\Rightarrow x \in (M \cap N) \cup (M \cap S) = B$.

b) „ $B \subset A$ “:

Sei $x \in B$.

$\Rightarrow$ $x \in M \cap N$ oder $x \in M \cap S$

Falls $x \in M \cap N$:

$\Rightarrow$ $x \in M$ und $x \in N$

$\Rightarrow$ $x \in N \cup S$ (wegen $x \in N$)

$\Rightarrow$ $x \in M \cap (N \cup S) = A$ (wegen $x \in M$)

Falls $x \in M \cap S$:

$\Rightarrow$ $x \in M$ und $x \in S$.

$\Rightarrow$ $x \in N \cup S$ (wegen $x \in S$)

$\Rightarrow$ $x \in M \cap (N \cup S)$ (wegen $x \in M$) $\square$

Beweisende.

1.7. Satz: (Rechenregeln für Komplementbildung)

Bei Mengen $M, N$ innerhalb einer Grundmenge $G$ gilt:

a) $M \setminus N = M \cap \overline{N}$

b) De Morgan'sche Regeln:

i) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$

ii) $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$

c) Aus $M \subset N$ folgt $\overline{N} \subset \overline{M}$.

„Komplementbildung kehrt die Operatoren um“.

Beweis: Übungsaufgabe

## 1.8. Unendliche Durchschnitte und Vereinigungen

Def.: Sei $M$ eine Menge von Indizes ($z.B.\ M = \mathbb{N}$).
Für alle $n \in M$ sei eine Menge $A_n$ gegeben. Dann ist

$$\bigcup_{k \in M} A_k := \{ x \mid x \in A_i \text{ für (mindestens) ein } i \in M \}$$

$$\bigcap_{k \in M} A_k := \{ x \mid x \in A_i \text{ für alle } i \in M \}$$

Für endliche Mengen, z.B. $M = \{1, \ldots, n\}$ stimmt diese Def. mit der bisherigen Definition überein. Man schreibt auch

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

(Wegen des Assoziativgesetzes ist keine Klammerung notwendig)

## 1.9 Beispiel

$M := \mathbb{N}$, $\quad A_k := \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{k} \}$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_n$$

aber: $\quad \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset .$

(Es gibt keine positive Zahl $x$, die für alle $k \in \mathbb{N}$ in $(0, \frac{1}{k})$ liegt).

1.10. Def.: Seien $M, N$ Mengen. Dann heißt die Menge

$$M \times N := \{(x,y) \mid x \in M, y \in N\}$$

aller geordneten (!) Paare $(x,y)$ mit $x \in M$, $y \in N$ das kartesische Produkt von $M$ und $N$.

Beachte: $(5,3) \neq (3,5)$ (im Unterschied zu $\{5,3\} = \{3,5\}$)

1.11. Beispiel:

$M = \{1,2\}$, $N = \{a,b,c\}$

$M \times N = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$

$N \times M = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$

Im Allgemeinen ist also $M \times N \neq N \times M$.

1.12 Verallgemeinerung:

Das n-fache kartesische Produkt der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist gegeben durch

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{(m_1, \ldots, m_n) \mid m_1 \in M_1, \ldots, m_n \in M_n\}$$

Sind alle Mengen gleich, so kürzt man ab:

$$M^n := \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{n\text{-mal}}$$

Bsp.: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$