Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2002

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Martin Welk
Dr. Bernhard Burgeth

12. Übung zur Mathematik für Informatiker II

Die **Anmeldung für die Klausur am 20. Juli 2002** ist ab sofort möglich. Nutzen Sie dazu bitte das Anmeldeformular unter

`http://degas.mia.uni-saarland.de/anmeldung_mfi02.html`

Anmeldeschluss ist der **10. Juli 2002.**

Hinweis: Numerische Berechnungen sind mit Taschenrechnergenauigkeit auszuführen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima sowie Sattelpunkte der auf dem $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4\,x\,y + 1$.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Die Menge $\{(x,y,z)^\top \mid x + 2\,y + z = 4\}$ stellt eine Ebene im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ dar. Berechnen Sie den euklidischen Abstand des Punktes $(1,0,-2)^\top \in \mathbb{R}^3$ zu dieser Ebene.
Hinweis: Betrachten Sie das Quadrat der euklidischen Metrik.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Bestimmen Sie angenäherte Lösungen der Gleichung $\cos x = x$, indem Sie 3 Schritte

a) des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 1$,

b) des vereinfachten Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 1$,

c) des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 4.7$

durchführen. Geben Sie dabei die Ergebnisse jedes Iterationsschrittes an.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) := (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y, \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y)$$

in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lokal injektiv ist. Geben Sie die Koordinatenfunktionen einer lokalen Umkehrfunktion f^{-1} an. Bestimmen Sie die Matrix $J_{f^{-1}}(u, v)$.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Leiten Sie die Euler-Lagrange'sche Differentialgleichung zu dem Variationsproblem

$$I(y(x)) := \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x \stackrel{!}{=} \mathrm{Min}$$

(für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $y(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$) her. Zeigen Sie, dass lineare Funktionen $y(x)$ diese Differentialgleichung erfüllen.
Bemerkung: Das zu minimierende Funktional $I(y(x))$ beschreibt gerade die euklidische Länge der Kurve der Funktion $y(x)$ über dem Intervall $[a, b]$. Dass lineare Funktionen die Differentialgleichung erfüllen, beweist, dass Geraden Kurven minimaler Länge zwischen ihren Endpunkten sind.

Abgabetermin: Donnerstag, 4. 7. 2002 vor der Vorlesung