Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2002

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Martin Welk
Dr. Bernhard Burgeth

11. Übung zur Mathematik für Informatiker II

Aufgabe 1: (8 Punkte)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ heißt *homogen vom Grad* $p \in \mathbb{N}$, wenn für jedes $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $f(t\,x) = t^p\, f(x)$ erfüllt ist. Zeigen Sie:

a) Ist f eine $\mathcal{C}^1$-Funktion und homogen vom Grad $p \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\langle x, \nabla f(x) \rangle \;=\; p\, f(x)\,.$$

b) Ist f eine $\mathcal{C}^2$-Funktion und homogen vom Grad $p \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\langle x,\; \mathrm{H}f(x)\,x \rangle \;=\; p(p-1)\, f(x)\,,$$

wobei $\mathrm{H}f(x)$ die Hesse-Matrix von f in x bezeichnet.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Es seien $g : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ jeweils $\mathcal{C}^2$-Funktionen und $\|\cdot\|$ stehe für die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$\Delta(f \circ g)(x) = f''(g(x))\, \|\nabla g(x)\|^2 + f'(g(x))\, \Delta g(x)$$

für $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(u,v) = u\mathrm{e}^{1-\frac{u^2}{2}-\frac{v^2}{2}}\,.$$

a) Berechnen Sie die Taylorentwicklung T_2 von f an der Stelle $(1,1)$ bis zum 2. Grad.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der unter a) gewonnenen Taylorentwicklung einen Näherungswert für $f(1.1, 0.9)$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Gegeben sei die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

und das dazu gebildete Finite-Differenzen-Verfahren aus Beispiel 22.4 der Vorlesung. Berechnen Sie numerisch die genäherten Funktionswerte u_i^k für die drei Zeitschichten $k = 1, 2, 3$ und die Gitterpunkte $i = -5, -4, \ldots, 4, 5$, wenn die Werte der 0-ten Zeitschicht

$$u_i^0 = \begin{cases} 1 & \text{für } |i| \leq 2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben sind. Es sei dabei $h = 1$ und $\tau = 0.1$.
Stellen Sie die berechneten Werte für die einzelnen Zeitschichten grafisch dar.

Aufgabe 5: (8 Punkte)

Von der Funktion $u(x)$ seien die Werte $u_{i+\frac{1}{2}} = u(i+\frac{1}{2})$ an den Stellen $x = i+\frac{1}{2}$, i ganzzahlig, bekannt. Die Funktion $u(x)$ wird als unendlich oft differenzierbar vorausgesetzt. Bestimmen Sie eine Approximation für den Wert $u_i'' = u''(i)$ der zweiten Ableitung von u an der Stelle $x = i$, i ganzzahlig, unter Verwendung der vier Funktionswerte $u_{i-\frac{3}{2}}$, $u_{i-\frac{1}{2}}$, $u_{i+\frac{1}{2}}$, $u_{i+\frac{3}{2}}$. Welche Konsistenzordnung hat diese Approximation?

Abgabetermin: Donnerstag, 27. 6. 2002 vor der Vorlesung