Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2002

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Martin Welk
Dr. Bernhard Burgeth

10. Übung zur Mathematik für Informatiker II

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Gegeben seien die skalarwertige Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x) := x_3 \, \mathrm{e}^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}; \qquad G(x) := \begin{pmatrix} -2x_1 x_3 \\ -2x_2 x_3 \\ -2x_3^2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} .$$

Berechnen Sie als Funktionen von $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$

a) $\dfrac{\partial^2}{\partial x_2 \, \partial x_3} f(x)$,

b) $F(x) := \operatorname{grad} f(x)$ und $\operatorname{div} F(x)$,

c) $\operatorname{rot} G(x)$.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Es bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$, weiter seien v, x, $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\| = \|v\| = 1$. Man zeige: Die Funktion

$$P(x, y) := \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n}$$

ist für jedes y mit $\|y\| = 1$ eine harmonische Funktion von $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$.
Ist die Richtungsableitung (bezüglich x) von P in Richtung v auch eine harmonische Funktion von $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$? (Begründung)

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Es bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ und $D := \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t \in (0,+\infty)\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\Phi(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4t}\right)$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$ die Diffusionsgleichung erfüllt.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Es sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, mit $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, eine skalare C^2-Funktion. Zeigen Sie:

$$\text{rot } (\nabla f) = 0\,.$$

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Es sei $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, mit $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, ein C^2-Vektorfeld.

a) Zeigen Sie:

$$\text{div rot } F = 0\,.$$

b) Zeigen Sie: Zum Vektorfeld $F(x,y,z) = (xz, xyz, y^2)^\top$ kann es *kein* anderes Vektorfeld G geben derart, dass $F = \text{ rot } G$.

Abgabetermin: Donnerstag, 20. 6. 2002 vor der Vorlesung