Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2002

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Martin Welk
Dr. Bernhard Burgeth

9. Übung zur Mathematik für Informatiker II

Hinweis: Numerische Berechnungen sind mit Taschenrechnergenauigkeit auszuführen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{pmatrix}.$$

Welches Residuum erzeugt die Näherungslösung $\tilde{x} = (3,0)^\top$ bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm? Ist $\tilde{x}$ eine gute Näherung? Wie ist dieses Phänomen zu erklären?

Aufgabe 2: (12 Punkte)

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Ergebnisse der ersten beiden Iterationen des
a) Jacobi-Verfahrens, **b)** Gauß-Seidel-Verfahrens,
c) SOR-Verfahrens mit dem Parameter $\omega = 1.1$
zur Lösung des Gleichungssystems $A\,x = b$, ausgehend vom Anfangsvektor $x_0 = (0,0,0)^\top$.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$H := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(vgl. Aufgabe 4 der 8. Übung). Bestimmen Sie mittels einfacher Vektoriteration Näherungswerte für den dominanten Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor der Matrix H. Beginnen Sie dabei mit dem Vektor $(1,0)^\top$ und führen Sie mindestens vier Iterationsschritte aus.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

In der Vorlesung wurde das *Jacobi-Verfahren* zur Bestimmung aller Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix beschrieben. Die Grundidee des Verfahrens besteht darin, in jedem Schritt ein Paar symmetrisch zueinander liegender Matrixeinträge außerhalb der Hauptdiagonalen durch eine orthogonale Transformation zu Null zu machen.

Dazu wird im n-ten Schritt des Verfahrens aus der Matrix A mit den Matrixeinträgen a_{kl}, $k, l = 1, \ldots, N$, die Matrix $\tilde{A} := O_n^\top A O_n$ mit den Matrixeinträgen $\tilde{a}_{kl}$, $k, l = 1, \ldots, N$, gebildet. In der transformierten Matrix $\tilde{A}$ sollen die Einträge $\tilde{a}_{ij}$ und $\tilde{a}_{ji}$ $(1 \le i < j \le N)$ gleich 0 sein. (Es wird angenommen, dass in der Matrix A die Einträge a_{ij} und a_{ji} nicht gleich 0 sind.) Dazu wählt man für O_n eine Drehmatrix der Gestalt

$$O_n = Q(i, j, \varphi_n) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \cos\varphi_n & & \cdots & & \sin\varphi_n & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & -\sin\varphi_n & & \cdots & & \cos\varphi_n & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

mit $-\frac{\pi}{4} < \varphi_n \le \frac{\pi}{4}$, wobei die Einträge $\cos\varphi_n$, $\pm\sin\varphi_n$ in der i-ten und j-ten Zeile und Spalte stehen.

Beweisen Sie: Damit für die transformierte Matrix $\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji} = 0$ gilt, muss der Drehwinkel φ_n gemäß der Formel

$$\varphi_n = \arctan \frac{a_{jj} - a_{ii} \pm \sqrt{(a_{jj} - a_{ii})^2 + 4a_{ij}^2}}{2a_{ij}}$$

gewählt werden, wobei für $\pm$ das Operationszeichen $+$ zu wählen ist, wenn $a_{ii} \ge a_{jj}$, jedoch $-$, wenn $a_{ii} < a_{jj}$.

Abgabetermin: Donnerstag, 13. 6. 2002 vor der Vorlesung