Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2002

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Martin Welk
Dr. Bernhard Burgeth

8. Übung zur Mathematik für Informatiker II

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass durch die Gleichung

$$y = \frac{1}{x}\,, \qquad x \neq 0$$

in einem ebenen kartesischen Koordinatensystem eine Hyperbel beschrieben wird. Stellen Sie dazu die Kurve mit Hilfe einer quadratischen Form dar und transformieren Sie diese in Hauptachsenform.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Gegeben sei die Quadrik

$$q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 - 49 = 0.$$

Bilden Sie die Normalform und geben Sie an, um welche Art von Kurve es sich handelt. Wie lauten die Koordinaten des Mittelpunktes? Welchen Winkel schließen die Hauptachsen mit den Koordinatenachsen (im ursprünglichen Koordinatensystem) ein?

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Gibt es eine *reelle* Matrix M, welche die Gleichung $M^2 = A$ erfüllt, falls

a) $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; b) $A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$? (Begründung)

Berechnen Sie gegebenenfalls diese Matrix M.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$H := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Gesamt-, Zeilensummen-, Frobenius- und Spektralnorm von H.

Aufgabe 5: (10 Punkte)

Es sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix und es bezeichne $\|\cdot\|$ sowohl eine Vektornorm auf dem $\mathbb{R}^n$ als auch die zugehörige Matrixnorm. Man definiert eine durch $\|\cdot\|$ induzierte *Konditionszahl* $\kappa(A)$ vermöge $\kappa(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

a) Zeigen Sie:

$$\kappa(A) = \frac{\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}.$$

b) Berechnen Sie die Konditionszahl $\kappa(H)$ der Matrix H aus Aufgabe 4 bezüglich der Spektralnorm.

c) Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $x, b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zu einer Näherungslösung $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ der Gleichung $Ax = b$ definiert man das *Residuum* r durch $r := A\tilde{x} - b$. Zeigen Sie:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

Bemerkung: Diese Ungleichung besagt, dass ein kleines Residuum nur dann einen kleinen relativen Fehler impliziert, wenn auch die Konditionszahl $\kappa(A)$ klein ist.

Abgabetermin: Donnerstag, 6. 6. 2002 vor der Vorlesung