Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2002

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Martin Welk
Dr. Bernhard Burgeth

7. Übung zur Mathematik für Informatiker II

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Berechnen Sie das charakteristische Polynom der folgenden Matrix F:

$$F := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -p_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -p_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -p_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -p_4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} .$$

Wie lautet die zu A gehörende Diagonalmatrix?
Geben Sie die entsprechenden Transformationsmatrizen an.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Es seien in $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ und Konstanten a_{ij} $(i = 1, \ldots, n;$ $j = 2, \ldots, n)$ gegeben. Zeigen Sie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \begin{vmatrix} f_1(x) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n'(x) & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Menge $O(n)$ der orthogonalen Matrizen und die Menge $SO(n)$ der orthogonalen Matrizen mit Determinante $+1$, mit der Matrixmultiplikation als Operation versehen, Gruppen sind (vgl. Satz 11.6 der Vorlesung).

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Matrix A gehört zur speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3)$.

(b) Für jeden Vektor $v = t\cdot(1,1,1)^\top$, wobei t eine reelle Zahl ist, ist $Av = v$.

(c) Für jeden zu $(1,1,1)^\top$ orthogonalen Vektor $w \neq 0$ des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^3$ schließt Aw mit w einen Winkel von $60°$ ein.

Bemerkung: Die Eigenschaften (a)–(c) bedeuten insgesamt, dass durch die Matrix A (genauer: durch die Abbildung $u \mapsto Au, u \in \mathbb{R}^3$) eine Drehung im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ um einen Winkel von $60°$ beschrieben wird, wobei die Drehachse durch den Koordinatenursprung in Richtung des Vektors $(1,1,1)^\top$ verläuft.

Abgabetermin: Freitag, 31. 5. 2002 vor der Vorlesung