Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2002

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Martin Welk
Dr. Bernhard Burgeth

6. Übung zur Mathematik für Informatiker II

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Bestimmen Sie aus den Vektoren $\{(3,4,0)^\top, (-1,7,5)^\top, (-7,-1,15)^\top\}$ mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthogonalbasis im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthogonalbasis im Prä-Hilbert-Raum $\mathcal{P}_2$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 mit dem Skalarprodukt $\langle u, v\rangle := \int_{-1}^{1} u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x$. Beginnen Sie mit der Basis $\{1, x, x^2\}$.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Entwickeln Sie die folgende Funktion auf $[0, 2\pi]$ in eine Fourierreihe:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0, \pi, 2\pi, \\ -1 & \text{für} \quad \pi < x < 2\pi\,. \end{cases}$$

Aufgabe 4: (12 Punkte)

Wavelets stellen eine aktuelle lokale Alternative zu den trigonometrischen Fourierbasen dar. In dieser Aufgabe sollen Sie mit dem Grundkonzept vertraut werden.

(a) Ausgehend vom *Haar-Mutterwavelet*

$$\Psi(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

werden skalierte und verschobene Wavelets erzeugt durch

$$\Psi_{j,k}(x) \;:=\; \frac{1}{2^{j/2}}\, \Psi\left(\frac{x}{2^j} - k\right)$$

Dabei läuft j von n bis 1, und k läuft von 0 bis $2^{n-j}-1$.
Skizzieren Sie diese Funktionen für $n=3$.

(b) Sei $N=2^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Haar-Wavelets $\Psi_{j,k}$ zusammen mit

$$\Phi_{n,0}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}} & \text{für } 0 \le x \le 2^n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

auf dem Intervall $[0,N]$ eine Orthogonalbasis bzgl. $\langle u,v\rangle := \int_0^N u(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$ bilden.

(c) Stellen Sie das Signal $f=(6,4,5,6,2,0,3,2)^\top$ in dieser Orthonormalbasis dar, indem Sie es als stückweise konstante Funktion im Intervall $[0,8]$ auffassen.

(d) Erzeugen Sie drei „komprimierte“ Versionen von f, indem Sie sukzessive die drei betragskleinsten Waveletkoeffizienten Null setzen. Der Koeffizient vor $\Phi_{n,0}$ soll dabei nicht verändert werden.

Abgabetermin: Donnerstag, 23. 5. 2002 vor der Vorlesung