Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2002

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Martin Welk
Dr. Bernhard Burgeth

5. Übung zur Mathematik für Informatiker II

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{(3,0,4)^\top, (-4,0,3)^\top, (0,9,0)^\top\}$ eine Orthogonalbasis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ sind. Stellen Sie einen beliebigen Vektor $(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ bzgl. dieser Basis dar.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Ist die Menge $\left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$ von Polynomen orthogonal im Raum $C[-1,1]$ bzgl. des Skalarprodukts $\langle u, v\rangle := \int_{-1}^{1} u(x)\, v(x)\; \mathrm{d}x$?

Ist diese Menge auch orthogonal im Raum $C[0,1]$ versehen mit dem Skalarprodukt $\langle u, v\rangle := \int_{0}^{1} u(x)\, v(x)\; \mathrm{d}x$?

Ist diese Menge eine Basis des Vektorraums $\mathcal{P}_2$ aller Polynome vom Grad ≤ 2 ? (Begründung)

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Stellen Sie das Polynom $x^2 + x + 1$ bzgl. der Basis $\left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$ dar.

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, sei $W_n := \{0;1\}^n$ die Menge aller binären Wörter der Länge n, also der n-Tupel $w = (w_1, \ldots, w_n)$ mit $w_1, \ldots, w_n \in \{0;1\}$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen $d_i : W_n \times W_n \to \mathbb{R}$ Metriken sind!

$$\begin{aligned} d_1(w,w') &:= \begin{cases} 0, & \text{falls } w = w', \\ 1 & \text{sonst;} \end{cases} \\ d_2(w,w') &:= \sum_{i=1}^{n} |w_i - w_i'|; \\ d_3(w,w') &:= \left|\sum_{i=1}^{n} (w_i - w_i')\right|; \end{aligned}$$

$$d_4(w, w') := \begin{cases} 0, & \text{falls } w = w', \\ \max\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \le i \le n, w_i \ne w_i'\} & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$d_5(w, w') := \begin{cases} 0, & \text{falls } w = w', \\ \min\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \le i \le n, w_i \ne w_i'\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist jeweils $w = (w_1, \ldots, w_n)$, $w' = (w_1', \ldots, w_n')$ mit $w_1, \ldots, w_n, w_1', \ldots, w_n' \in \{0; 1\}$.

Abgabetermin: Donnerstag, 16. 5. 2002 vor der Vorlesung