Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2002

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Martin Welk
Dr. Bernhard Burgeth

Lösungen der Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur Mathematik für Informatiker II

Lösung zu Aufgabe 1:

Der Integrand muss zunächst durch Partialbruchzerlegung umgeformt werden. Nullsetzen des Nenners ergibt die quadratische Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$ mit den Lösungen 1 und 2, woraus die Zerlegung $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ hervorgeht. Der Ansatz

$$\frac{x}{x^2-3x+2} \overset{!}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

führt auf die Bedingungen $A + B = 1$ und $-2A - B = 0$, also $A = -1$, $B = 2$ und folglich

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}.$$

Damit erhält man für das Integral

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x-2} = -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + C$$

($x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$, C Integrationskonstante).

Lösung zu Aufgabe 2:

Wie in der Aufgabenstellung vorgeschlagen, fassen wir den Graphen von f als parametrisierte Kurve auf: $c_f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, f(t))$. Die Komponentenfunktionen x_1 und x_2 von c_f (vgl. Definition 5.1) lauten also $x_1(t) = t$ und $x_2(t) = f(t)$. Der Anfangspunkt der Kurve ist $(x^*, f(x^*)) = \left(1, 1^2 - \frac{\ln 1}{8}\right) = (1,1)$. Damit erhält man nach Definition 5.8 für die Bogenlängenfunktion S_f:

$$\begin{aligned} S_f(t) &= \int_1^t |\dot{c}_f(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = \int_1^t \sqrt{\big(\dot{x}_1(\tau)\big)^2 + \big(\dot{x}_2(\tau)\big)^2}\,\mathrm{d}\tau = \\ &= \int_1^t \sqrt{1^2 + \left(2\tau - \frac{1}{8\tau}\right)^2}\,\mathrm{d}\tau = \int_1^t \sqrt{1 + 4\tau^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64\tau}}\,\mathrm{d}\tau = \end{aligned}$$

$$= \int_1^t \sqrt{4\tau^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64\tau}}\,\mathrm{d}\tau = \int_1^t \sqrt{\left(2\tau + \frac{1}{8\tau}\right)^2}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_1^t 2\tau + \frac{1}{8\tau}\,\mathrm{d}\tau = \left[\tau^2 + \frac{\ln\tau}{8}\right]_{\tau=1}^{\tau=t} = t^2 + \frac{\ln t}{8} - 1.$$

Lösung zu Aufgabe 3:

Nach Definition der durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierten Norm und unter Ausnützung der Linearität und Symmetrie des Skalarprodukts gilt:

$$\|x+y\| = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2\,,$$

und ganz entsprechend (man ersetze y durch $-y$):

$$\|x-y\| = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2\,.$$

Addition der beiden Gleichungen ergibt:

$$\|x+y\| + \|x-y\| = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Lösung zu Aufgabe 4:

Man hat $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ für $i < j$ mit $i,j \in \{1,2,3\}$ nachzuweisen. Es gelten

$$\begin{aligned}
\langle u_1, u_2\rangle &= \langle(-3,4,0)^\top, (4,3,0)^\top\rangle = (-3)\cdot 4 + 4\cdot 3 + 0\cdot 0 = 0\,,\\
\langle u_1, u_3\rangle &= \langle(-3,4,0)^\top, (0,0,1)^\top\rangle = 0\,,\\
\langle u_2, u_3\rangle &= \langle(4,3,0)^\top, (0,0,1)^\top\rangle = 0\,.
\end{aligned}$$

Weiter gilt nach Satz 9.9:

$$v = \frac{\langle v, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\cdot u_1 + \frac{\langle v, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}\cdot u_2 + \frac{\langle v, u_3\rangle}{\|u_3\|^2}\cdot u_3$$

Man berechnet

$$\begin{aligned}
\frac{\langle v, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} &= \frac{\langle(3,-7,4)^\top, (-3,4,0)^\top\rangle}{\|(-3,4,0)^\top\|^2} = \frac{-9-28+0}{9+16+0} = \frac{-37}{25}\,,\\
\frac{\langle v, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} &= \frac{\langle(3,-7,4)^\top, (4,3,0)^\top\rangle}{\|(4,3,0)^\top\|^2} = \frac{12-21+0}{16+9+0} = \frac{-9}{25}\,,\\
\frac{\langle v, u_3\rangle}{\|u_3\|^2} &= \frac{\langle(3,-7,4)^\top, (0,0,1)^\top\rangle}{\|(0,0,1)^\top\|^2} = \frac{4}{1} = 4\,.
\end{aligned}$$

Das führt zur gesuchten Darstellung:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{-37}{25} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-9}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Lösung zu Aufgabe 5:

Durch die zweimalige Anwendung der Transformation auf einen Vektor x entsteht der Vektor $A\,(A\,x) = A^2\,x$; somit gilt

$$A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.8 \\ 2.4 \end{pmatrix} ;\; A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 7.2 \end{pmatrix} , \text{ zusammen } A^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.8 & 2.4 \\ 2.4 & 7.2 \end{pmatrix} .$$

Da auf der linken Seite der letzten Gleichung nichts anderes steht als A^2, ist eine reelle, positive Matrix A gesucht, deren Quadrat die Matrix auf der rechten Seite ist (das ist möglich, da diese Matrix positiv definit ist: $5.8 > 0$; $5.8 \cdot 7.4 - 2.4^2 = 36 > 0$). Dazu wird die Matrix auf Diagonalform transformiert, indem Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt werden: Aus der charakteristischen Gleichung $0 = (5.8 - \lambda)(7.2 - \lambda) - 2.4^2 = 36 - 13\lambda + \lambda^2$ ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 6.5 + 2.5 = 9$ und $\lambda_2 = 6.5 - 2.5 = 4$. Der Ansatz $\begin{pmatrix} 5.8 & 2.4 \\ 2.4 & 7.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ergibt für Eigenvektoren $(x, y)^\top$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 9$ die Bedingung $5.8x + 2.4y = 9x$, also $4x = 3y$. Ein normierter Eigenvektor ist also $(0.6, 0.8)^\top$. Analog findet man, dass $(0.8, -0.6)^\top$ ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$ ist. Es ist also

$$\begin{pmatrix} 5.8 & 2.4 \\ 2.4 & 7.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix} .$$

Ersetzt man in diesem Produkt die Diagonalmatrix der Eigenwerte in der Mitte durch die Diagonalmatrix der Quadratwurzeln der Eigenwerte, so ergibt sich die gesuchte Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.36 & 0.48 \\ 0.48 & 2.64 \end{pmatrix} .$$

(Nachrechnen bestätigt die Richtigkeit der Lösung.)

Lösung zu Aufgabe 6:

Der Startvektor $x^{(0)} = (1, 0)^\top$ ist normiert. Durch Multiplikation von links mit

A erhält man sukzessive

$$\begin{array}{llll}
A\,x^{(0)} = (1,1)^\top, & |A\,x^{(0)}| = \sqrt{2}, & x^{(1)} = \frac{1}{|A\,x^{(0)}|}A\,x^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^\top; \\
A\,x^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2,1)^\top, & |A\,x^{(1)}| = \sqrt{5/2}, & x^{(2)} = \frac{1}{|A\,x^{(1)}|}A\,x^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^\top; \\
A\,x^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(3,2)^\top, & |A\,x^{(2)}| = \sqrt{13/5}, & x^{(3)} = \frac{1}{|A\,x^{(2)}|}A\,x^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3,2)^\top; \\
A\,x^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{13}}(5,3)^\top, & |A\,x^{(3)}| = \sqrt{34/13}, & x^{(4)} = \frac{1}{|A\,x^{(3)}|}A\,x^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{34}}(5,3)^\top; \\
A\,x^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{34}}(8,5)^\top, & |A\,x^{(4)}| = \sqrt{89/34}, & x^{(5)} = \frac{1}{|A\,x^{(4)}|}A\,x^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{89}}(8,5)^\top
\end{array}$$

bzw. bei rein numerischer Rechnung

k	$A\,x^{(k)}$	$\lvert A\,x^{(k)}\rvert$	$x^{(k+1)}$
0	$(1,1)^\top$	1.4142136	$(0.7071068, 0.7071068)^\top$
1	$(1.4142136, 0.7071068)^\top$	1.5811388	$(0.8944272, 0.4472136)^\top$
2	$(1.3416408, 0.8944272)^\top$	1.6124515	$(0.8320503, 0.5547002)^\top$
3	$(1.3867505, 0.8320503)^\top$	1.6172151	$(0.8574929, 0.5144956)^\top$
4	$(1.3719887, 0.8574929)^\top$	1.6179144	$(0.8479983, 0.5299989)^\top$

Die Normen $|A\,x^{(k)}|$ sind Näherungswerte für den dominanten Eigenwert, die $x^{(k)}$ sind Näherungswerte für einen normierten Eigenvektor zu diesem Eigenwert.

Bemerkung: In der ersten Rechnung erkennt man, dass die auftretenden Zähler, Nenner und Radikanden der Fibonacci-Folge entstammen. Der exakte Wert des dominanten Eigenwertes ist das Verhältnis des goldenen Schnitts $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.6180340$.

Lösung zu Aufgabe 7:

Gemäß Bemerkung 19.6 hat man den Gradienten von f an der Stelle $(1,-3)$ zu finden, denn er zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs. Dazu berechnet man die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln x\,.$$

Also gilt: $\nabla f(x,y) = \left(\frac{y}{x}, \ln x\right)^\top$ und entsprechend $\nabla f(x_0,y_0) = \nabla f(1,-3) = (-3,0)^\top$. Nach Definition 9.1 ergibt sich der Winkel $\varphi \in [0,\pi)$ zwischen den Vektoren $\nabla f(x_0,y_0) = (-3,0)^\top$ und $v = (3,4)^\top$ aus

$$\cos\varphi = \frac{\langle(-3,0)^\top,(3,4)^\top\rangle}{\|(-3,0)^\top\|\cdot\|(3,4)^\top\|} = \frac{-9}{3\cdot\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{-3}{5}\,.$$

Sorgfältige Anwendung der Umkehrfunktion arccos des cos ergibt im Bogenmaß bzw. Gradmaß:

$$\varphi \approx 2.214297 \quad \text{bzw.} \quad \varphi \approx 126.8699^\circ\,.$$

Lösung zu Aufgabe 8:

Aus der Funktion f und der Nebenbedingung bildet man die Lagrange-Funktion F (vgl. 26.3):

$$F(x,y,\lambda) = 4x + 6y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 13)\,.$$

Eine notwendige Bedingung für das Auftreten von Extrema ist das Verschwinden des Gradienten dieser Funktion F, es muss also gelten:

$$0 \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 2\lambda x \\ 6 + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 13 \end{pmatrix}.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen erhält man für $x, y \neq 0$:

$$\left.\begin{aligned} 2 + \lambda x = 0 \\ 3 + \lambda y = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{-2}{x} = \lambda = \frac{-3}{y} \Longrightarrow \frac{3}{2}x = y \qquad (*)$$

Diese Umformungen wären problematisch für $x = 0$ oder $y = 0$ (Division oder Multiplikation mit Null!), aber beides lässt sich durch die Gleichungen bereits ausschließen.
Einsetzen in die Nebenbedingung liefert nun

$$x^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 13 \Longleftrightarrow \frac{(4+9)\,x^2}{4} = 13 \Longleftrightarrow x^2 = 4\,.$$

Daraus ergeben sich die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.
Aus $(*)$ folgt für $x_1 = 2$, dass $y_1 = 3$, und für $x_2 = -2$, dass $y_2 = -3$.
Man errechnet $f(2,3) = 8 + 18 = 26$ und $f(-2,-3) = -8 + (-18) = -26$. Damit ist $(2,3)$ als Maximal- und $(-2,-3)$ als Minimalstelle erkannt.

Anmerkung: Dieser letzte Schluss beruht auf der in der Vorlesung angesprochenen Tatsache, dass eine stetige Funktion (hier $f(x,y) = 4x + 6y$) auf einer kompakten Menge (hier der Kreis um den Ursprung mit Radius $\sqrt{13}$: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 13\}$) ihr Maximum und Minimum tatsächlich annimmt.

Lösung zu Aufgabe 9:

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der Serverausfälle am selben Tag stattfinden, ist gleich eins minus die Wahrscheinlichkeit, dass alle Ausfälle an verschiedenen Tagen stattfinden.

Um die letztere zu ermitteln, muss man die Anzahl der *günstigen* Verteilungen der drei Servercrashs auf die zehn Tage durch die Anzahl aller *möglichen* solchen Verteilungen dividieren.

Eine Verteilung der Servercrashs auf die zehn Tage entspricht dem Ziehen von drei Objekten (Tagen) aus einer Gesamtheit von zehn Objekten mit Beachtung der Reihenfolge (Server 1, Server 2, Server 3), und zwar handelt es sich um eine Ziehung *ohne* Zurücklegen, wenn nur Verteilungen betrachtet werden, bei denen die drei Servercrashs an verschiedenen Tagen stattfinden – das sind gerade die günstigen Fälle – , dagegen um eine Ziehung mit Zurücklegen, wenn auch mehrere Ausfälle am selben Tag in Betracht kommen – das sind die möglichen Fälle.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ausfälle an verschiedenen Tagen stattfinden, ist also (#: Anzahl)

$$\frac{\#\text{ geord. Ziehungen 3 aus 10 ohne Zurücklegen}}{\#\text{ geord. Ziehungen 3 aus 10 mit Zurücklegen}} = \frac{10!/7!}{10^3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10 \cdot 10 \cdot 10} = 0.72\,.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Server am selben Tag ausfallen, ist demnach $1 - 0.72 = 0.28$ oder 28 %.

Anmerkung: Man kann den Formalismus der „Ziehung von Objekten“ auch vermeiden und wie folgt argumentieren: Die Anzahl der günstigen Fälle – keine zwei Server fallen am selben Tag aus – ist $10 \cdot 9 \cdot 8$, weil es für Server 1 zehn Möglichkeiten gibt, Server 2 aber nur noch die neun übrigen Tage zur „Auswahl“ hat und Server 3 schließlich acht Tage. Die Anzahl der möglichen Fälle ist $10 \cdot 10 \cdot 10$, weil jeder Server beliebig unter den zehn Tagen „wählen“ kann. So kommt man zum selben Ergebnis wie oben.