Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2002

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Martin Welk
Dr. Bernhard Burgeth

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur Mathematik für Informatiker II

Dieses Aufgabenblatt ist im Umfang einer dreistündigen Klausur angeglichen.

Numerische Berechnungen sind mit Taschenrechnergenauigkeit auszuführen.

Aufgabe 1:

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \, \mathrm{d}x$.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie explizit die Bogenlängenfunktion zum Graphen der Funktion

$$f(x) = x^2 - \frac{\ln x}{8}$$

im Intervall $[1, +\infty)$ zum Startpunkt $x^* = 1$. Fassen Sie dazu den Graph der Funktion f als Kurve

$$c_f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, f(t))$$

auf.

Aufgabe 3:

Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbertraum mit zugehöriger Norm $\| \cdot \|$. Zeigen Sie für $x, y \in V$:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass die Vektoren $u_1 = (-3, 4, 0)^\top$, $u_2 = (4, 3, 0)^\top$ und $u_3 = (0, 0, 1)^\top$ orthogonal im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sind, und stellen Sie den Vektor $v = (3, -7, 4)^\top$ bezüglich dieser Basis dar.

Aufgabe 5:

Es werde eine lineare Transformation der Form $x \mapsto A\,x$ für Vektoren $x \in \mathbb{R}^2$ betrachtet. Dabei ist A eine reelle und positive 2×2-Matrix.

Wird diese Transformation auf jeden der beiden Basisvektoren $(1,0)^\top$ und $(0,1)^\top$ zweimal angewendet, so ergeben sich die beiden Vektoren $(5.8, 2.4)^\top$ und $(2.4, 7.2)^\top$.

Man bestimme die Matrix A.

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie durch einfache Vektoriteration Näherungen für den dominanten Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beginnen Sie mit dem Vektor $(1,0)^\top$ und führen Sie fünf Iterationsschritte aus.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Funktion

$$f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = y \cdot \ln x.$$

Finden Sie im Punkt $(x_0, y_0) := (1, -3)$ den Vektor, in dessen Richtung die Funktion am schnellsten ansteigt. Welchen Winkel bildet er mit dem Vektor $v = (3,4)^\top$? Geben Sie diesen Winkel im Bogenmaß und im Gradmaß an.

Aufgabe 8:

Finden Sie die Maxima und Minima der auf dem $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion $f(x,y) = 4x + 6y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 13$.

Aufgabe 9:

Drei Server fallen innerhalb eines Zeitraums von zehn Tagen unabhängig voneinander jeweils genau einmal aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei dieser Ausfälle am gleichen Tag stattfinden?