Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2002

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Martin Welk
Dr. Bernhard Burgeth

Klausur
Mathematik für Informatiker II

Hinweise:

Die Arbeitszeit für diese Klausur beträgt 180 Minuten.

Zugelassene Hilfsmittel sind Vorlesungsskript und eigene Mitschriften aus Vorlesung und Übungen, ferner ein nicht programmierbarer Taschenrechner.

Mobiltelefone sind nicht zugelassen.

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** _____________

Aufgabe 1:

Gegeben sei die auf dem Intervall $[-1, +\infty)$ definierte Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|}, \qquad x \in [-1, +\infty).$$

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Teilintervall $[-1, 3]$. *(2 Punkte)*

b) Ist der Flächeninhalt, den der Graph mit der x-Achse einschließt, endlich? (Begründung) *(4 Punkte)*

c) Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Graph dieser Funktion um die x-Achse rotiert. *(3 Punkte)*

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** _____________

Aufgabe 2:

Berechnen Sie $\int\limits_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x$

a) exakt durch analytische Integration, *(2 Punkte)*

b) numerisch mit Hilfe der Trapezregel. Verwenden Sie dabei 6 Stützstellen (Anfangs- und Endpunkt des Integrationsintervalls mitgezählt). *(4 Punkte)*

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** _____________

Aufgabe 3:

Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum mit der induzierten Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie für $x, y \in V$:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

(3 Punkte)

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** _____________

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Quadrik

$$3x^2 - 8xy - 3y^2 - 1 = 0.$$

a) Führen Sie eine Hauptachsentransformation durch. *(4 Punkte)*

b) Um welchen Kurventyp handelt es sich? *(1 Punkte)*

c) Geben Sie die Lage der Hauptachsen und die Lage des Mittelpunktes an. *(2 Punkte)*

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** _____________

Aufgabe 5:

Es sei M eine Menge und es seien $d_1 : M \times M \to \mathbb{R}$ und $d_2 : M \times M \to \mathbb{R}$ Metriken auf M. Ferner seien α und β positive reelle Zahlen. Zeigen Sie: Die durch $d(x,y) := \alpha d_1(x,y) + \beta d_2(x,y)$ definierte Funktion $d : M \times M \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls eine Metrik auf M.

Name: ________________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie Näherungswerte für $\sqrt[7]{1643}$, indem Sie durch ein geeignetes Verfahren die Gleichung $x^7 = 1643$ iterativ lösen. Gehen Sie dabei vom Startwert $x_0 = 3$ und führen Sie 3 Iterationen durch.

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** _____________

Aufgabe 7:

Es seien $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Finden Sie, soweit vorhanden, die Maxima, Minima und Sattelpunkte der auf dem $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion $f(x,y) = e^{a\,x} - e^{b\,y} + e^{-a\,x} - e^{-b\,y}$.

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** _____________

Aufgabe 8:

Gegeben sei das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gemäß

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz + 2x \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie Rotation und Divergenz von g.

b) Zeigen Sie, dass es eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt, deren Gradientenfeld g ist.

Name: ________________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 9:

Eine Landschaftspflegefirma hat den Auftrag, an einem bestimmten Tag einen Baum zu fällen. Die Firma verfügt über zwei Motorsägen, zwei Holzfäller, zwei Kraftfahrer und einen LKW. Damit der Auftrag ausgeführt werden kann, muss am betreffenden Tag eine Motorsäge und der LKW funktionieren, und beide Holzfäller und ein Kraftfahrer müssen zum Dienst erscheinen.

Dabei fallen die beiden Motorsägen mit den Wahrscheinlichkeiten 0.2 und 0.3 aus, der LKW mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1. Die beiden Holzfäller melden sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 bzw. 0.1 krank, beide Fahrer mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05. Alle Maschinenausfälle und Krankmeldungen sind voneinander unabhängig.

Wie wahrscheinlich ist es, dass der Auftrag ausgeführt werden kann?