

Tensoren in der Datenanalyse

Edgar Tretschk

Universität des Saarlandes

2. Dezember 2015

Inhalt

- 1 Grundlagen
- 2 Singulärwertzerlegung
- 3 Ziffernerkennung
- 4 Bewegungsabläufe

Tensoren als mehrdimensionale Datenarrays

- *Tensor*: Verallgemeinerung von Vektoren und Matrizen auf beliebig viele Dimensionen
- dreidimensionale Tensoren über \mathbb{R} : $\mathcal{A} = (a_{ijk}) \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$

Ziffernerkennung

n verschiedene 16×16 -Bilder von Ziffern

$\Rightarrow \mathcal{D} \in \mathbb{R}^{16 \times 16 \times n}$

Tensoren als mehrdimensionale Datenarrays

- *Tensor*: Verallgemeinerung von Vektoren und Matrizen auf beliebig viele Dimensionen
- dreidimensionale Tensoren über \mathbb{R} : $\mathcal{A} = (a_{ijk}) \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$
- multipliziere Vektoren der d -ten Dimension von \mathcal{A} mit M :

$$\mathcal{A} \times_d M$$

Ziffernerkennung

n verschiedene 16×16 -Bilder von Ziffern

$$\Rightarrow \mathcal{D} \in \mathbb{R}^{16 \times 16 \times n}$$

Frobenius-Norm, Orthogonalität & Untertensoren

analog zu Vektoren und Matrizen:

- inneres Produkt:

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle := \sum_{i,j,k} a_{ijk} b_{ijk}$$

- Frobenius-Norm:

$$\|\mathcal{A}\|_F := \langle \mathcal{A}, \mathcal{A} \rangle^{1/2} = \left(\sum_{i,j,k} a_{ijk}^2 \right)^{1/2}$$

- Orthogonalität:

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = 0$$

- k -ter ($n - 1$ -dimensionaler) Untertensor in der d -ten Dimension (fixiere d -ten Index auf k):

$$\mathcal{S}_{i_d=k}$$

Singularwert-Zerlegung von Matrizen in Tensorschreibweise

betrachte $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ als Tensor:

$$M = U^{(1)} \Sigma U^{(2)T} = \Sigma \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)}$$

Interpretation:

$U^{(1)}$ transformiert Spalten (Vektoren der ersten Dimension) von Σ

$U^{(2)}$ transformiert Zeilen (Vektoren der zweiten Dimension) von Σ

Singulärwert-Zerlegung von Tensoren

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)} \times_3 U^{(3)}$$

- *Kerntensor* \mathcal{S} stellt Singulärwerte dar
- jede Dimension d hat eigene Singulärwerte:
 - k -ter Singulärwert der d -ten Dimension: $\sigma_k^{(d)} := \|\mathcal{S}_{i_d=k}\|_F$
 - Ordnung der Singulärwerte einer Dimension d :

$$\sigma_1^{(d)} \geq \sigma_2^{(d)} \geq \dots \geq \sigma_{I_d}^{(d)}$$

Singulärwert-Zerlegung von Tensoren

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)} \times_3 U^{(3)}$$

- *Kerntensor* \mathcal{S} stellt Singulärwerte dar
- jede Dimension d hat eigene Singulärwerte:
 - k -ter Singulärwert der d -ten Dimension: $\sigma_k^{(d)} := \|\mathcal{S}_{i_d=k}\|_F$
 - Ordnung der Singulärwerte einer Dimension d :

$$\sigma_1^{(d)} \geq \sigma_2^{(d)} \geq \dots \geq \sigma_{I_d}^{(d)}$$

- \mathcal{S} ist *nicht* diagonal, sondern orthogonal:
alle parallelen „Scheiben“ sind paarweise orthogonal

Berechnung der Singulärwertzerlegung

Matrix-Singulärwertzerlegung für Dimension d :

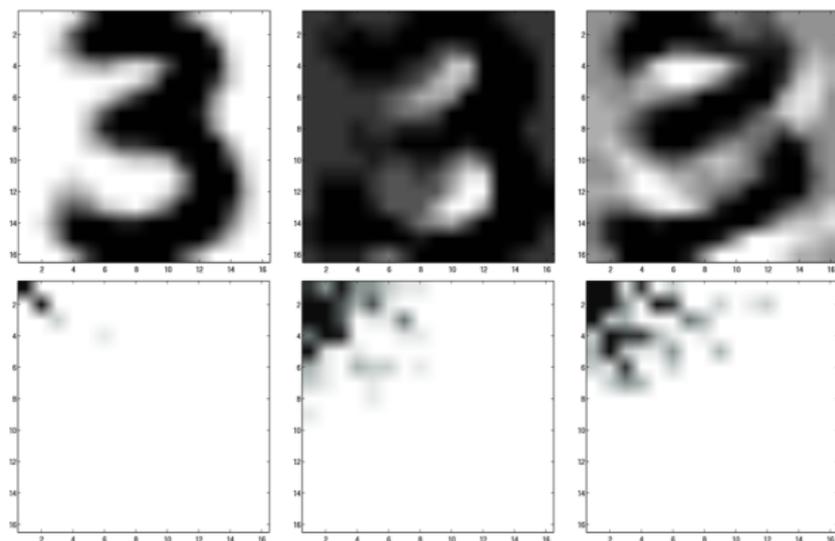
$$\mathcal{A}_d = U^{(d)} \Sigma^{(d)} (V^{(d)})^T$$

setze:

$$\mathcal{S} := \mathcal{A} \times_1 (U^{(1)})^{-1} \times_2 (U^{(2)})^{-1} \times_3 (U^{(3)})^{-1}$$

Optimierte Basis für Ziffern (I)

wähle Basis (B_k) mit $B_k := \mathcal{S}_{i_3=k} \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)}$



erste Reihe: B_1 , B_2 und B_3

zweite Reihe: entsprechende Scheiben $\mathcal{S}_{i_3=1}$, $\mathcal{S}_{i_3=2}$ und $\mathcal{S}_{i_3=3}$

Quelle: Eldén, 2007

Optimierte Basis für Ziffern (II)

- erster/größter Singulärwert in dritter Dimension: $\|\mathcal{S}_{i_3=1}\|$
⇒ wichtigste Richtung aller Ziffern: B_1
- größte Abweichungsrichtung von B_1 : B_2
- orthogonale Basis ⇒ robuste Darstellung von Ziffern

Darstellung unbekannter Ziffer Z in optimierter Basis

Optimierungsproblem via Methode der kleinsten Quadrate:

$$\min_{z \in \mathbb{R}^n} \left\| Z - \sum_{j=1}^n z_j B_j \right\|_F$$

Ergebnis:

$$z_j = \frac{\langle Z, B_j \rangle}{\langle B_j, B_j \rangle}, \quad j = 1, \dots, n$$

Singulärwertzerlegung von Bewegungsabläufen

- einzelne Bewegung: Vektor $b \in \mathbb{R}^w$ von Gelenkwinkeln zu bestimmten Zeiten
- n Personen führen m verschiedene Bewegungsarten aus:

$$\mathbb{R}^{n \times m \times w} \ni \mathcal{M}$$

Singulärwertzerlegung von Bewegungsabläufen

- einzelne Bewegung: Vektor $b \in \mathbb{R}^w$ von Gelenkwinkeln zu bestimmten Zeiten
- n Personen führen m verschiedene Bewegungsarten aus:

$$\mathbb{R}^{n \times m \times w} \ni \mathcal{M} = \mathcal{S} \times_1 P$$

P enthält die Personenparameter (Signatur) p_i jedes Individuums i

$$P = \begin{pmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{pmatrix}$$

Singulärwertzerlegung von Bewegungsabläufen

- einzelne Bewegung: Vektor $b \in \mathbb{R}^w$ von Gelenkwinkeln zu bestimmten Zeiten
- n Personen führen m verschiedene Bewegungsarten aus:

$$\mathbb{R}^{n \times m \times w} \ni \mathcal{M} = \mathcal{S} \times_1 P \times_2 A$$

P enthält die Personenparameter (Signatur) p_i jedes Individuums i ,
 A die Bewegungsparameter a_j jeder Bewegungsart j

$$P = \begin{pmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$$

Singulärwertzerlegung von Bewegungsabläufen

- einzelne Bewegung: Vektor $b \in \mathbb{R}^w$ von Gelenkwinkeln zu bestimmten Zeiten
- n Personen führen m verschiedene Bewegungsarten aus:

$$\mathbb{R}^{n \times m \times w} \ni \mathcal{M} = \mathcal{S} \times_1 P \times_2 A \times_3 J$$

P enthält die Personenparameter (Signatur) p_i jedes Individuums i ,
 A die Bewegungsparameter a_j jeder Bewegungsart j und
 J die „Eigenbewegungen“

$$P = \begin{pmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$$

Basis für Bewegungsarten

- Bewegungsbasis für Bewegungsart j :

$$A_j := \mathcal{S} \times_2 a_j^T \times_3 J$$

Basis für Bewegungsarten

- Bewegungsbasis für Bewegungsart j :

$$A_j := \mathcal{S} \times_2 a_j^T \times_3 J$$

- Linearkombination der Zeilenvektoren von A_j gemäß p_i liefert Instanz $b_{i,j}$ der Bewegungsart j für Person i :

$$b_{i,j} = p_i^T A_j$$

Bewegungssynthese zu neuer Person u

- neue Person u führt Bewegungsart j aus: $b_{u,j}$
- löse nach Signatur p_u auf:

$$b_{u,j} = p_u^T A_j$$

Bewegungssynthese zu neuer Person u

- neue Person u führt Bewegungsart j aus: $b_{u,j}$
- löse nach Signatur p_u auf:

$$b_{u,j} = p_u^T A_j$$

- gemäß p_u synthetisierte Bewegungen für Person u :

$$\mathcal{S} \times_1 p_u^T \times_2 A \times_3 J$$

k -ter Vektor der dritten Dimension des Tensors entspricht $b_{u,k}$

Basis für Personen

- Bewegungsbasis für Person i :

$$P_i := \mathcal{S} \times_1 p_i^T \times_3 J$$

Basis für Personen

- Bewegungsbasis für Person i :

$$P_i := \mathcal{S} \times_1 p_i^T \times_3 J$$

- Linearkombination der Zeilenvektoren von P_i gemäß a_j liefert Instanz $b_{i,j}$ der Bewegungsart j für Person i :

$$b_{i,j} = a_j^T P_i$$

Bewegungssynthese zu neuer Bewegung v

- bekannte Person i führt neue Bewegungsart v aus: $b_{i,v}$
- löse nach Signatur a_v auf:

$$b_{i,v} = a_v^T P_i$$

Bewegungssynthese zu neuer Bewegung v

- bekannte Person i führt neue Bewegungsart v aus: $b_{i,v}$
- löse nach Signatur a_v auf:

$$b_{i,v} = a_v^T P_i$$

- gemäß a_v synthetisierte Bewegungen für Bewegungsart v :

$$\mathcal{S} \times_1 P \times_2 a_v^T \times_3 J$$

k -ter Vektor der dritten Dimension des Tensors entspricht $b_{k,v}$



Haarlose Personen sind synthetisierte Versionen der anderen
Quelle: Vasilescu, *Human motion signatures: Analysis, synthesis, recognition*, 2002.



Anhand von Treppensteigen synthetisierte Laufbewegung
Quelle: Vasilescu, *Human motion signatures: Analysis, synthesis, recognition*, 2002.



Anhand von Treppensteigen synthetisierte Laufbewegung
Quelle: Vasilescu, *Human motion signatures: Analysis, synthesis, recognition*, 2002.



Anhand von Treppensteigen synthetisierte Laufbewegung
Quelle: Vasilescu, *Human motion signatures: Analysis, synthesis, recognition*, 2002.



Anhand von Treppensteigen synthetisierte Laufbewegung
Quelle: Vasilescu, *Human motion signatures: Analysis, synthesis, recognition*, 2002.

Quellen I



Eldén, L.

Matrix methods in data mining and pattern recognition.
Volume 4, Society for Industrial and Applied Mathematics
(SIAM), Philadelphia, PA, 2007.



De Lathauwer, Lieven and De Moor, Bart and Vandewalle,
Joos.

A multilinear singular value decomposition.
SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,
21(4):1253–1278, 2000.



Vasilescu, M Alex O.

Human motion signatures: Analysis, synthesis, recognition.
16th International Conference on Pattern Recognition.
Proceedings, 3:456–460, 2002.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!