

Proseminar: Matrixmethoden in Datenanalyse und Mustererkennung

QR-Zerlegung

Referent: René Poitiers

Gliederung

- Methode der kleinsten Quadrate
- Lösungsverfahren
- Rechenaufwand
- Updaten der Methode der kleinsten Quadrate

Methode der kleinsten Quadrate

- Gerade, die den Punkten $(0,6);(1,0);(2,0)$ am nächsten liegt.
- Gerade $b = C + Dt$
 - $C + 0D = 6$
 - $C + 1D = 0$
 - $C + 2D = 0$
- In Matrixschreibweise:
 - $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
 - Vektor b keine Linearkombination der Spalten von A
 - $Ax = b$ ist nicht lösbar!

Methode der kleinsten Quadrate

- Ziel: Minimierung des Fehlers $e = b - Ax$
- $\min_x ||b - Ax||_2^2 = \min_x ||b - QRx||_2^2 = \min_x ||Q(Q^T b - Rx)||_2^2 =$
 $\min_x ||Q^T b - Rx||_2^2$

Lösungsverfahren

- Householder-Transformation
- Givens-Rotation
- Gram-Schmidt-Orthogonalisierung
- Cholesky-Zerlegung

Householder-Transformation

- Zerlegung einer Matrix in
- Orthogonale Matrix
- Rechte obere Dreiecksmatrix
 - Numerisch stabil
- Effiziente Lösung von Gleichungssystemen:
 - $Ax = b \Leftrightarrow Q^T Ax = Q^T b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$

Methode der kleinsten Quadrate

- Ziel: Minimierung des Fehlers $e = b - Ax$
- $\min_x ||b - Ax||_2^2 = \min_x ||b - QRx||_2^2 = \min_x ||Q(Q^T b - Rx)||_2^2 = \min_x ||Q^T b - Rx||_2^2$
- Mit $R = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = (H_1 \quad H_2)$, $Q^T b = \begin{pmatrix} H_1^T & b \\ H_2^T & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$
 $\rightarrow ||\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Rx \\ 0 \end{pmatrix}||_2^2 = ||b_1 - Rx||_2^2 + ||b_2||_2^2$
- Löse $Rx = b_1 \rightarrow x = R^{-1}H_1^T b$

Rechenaufwand

- Gram-Schmidt: $2mn^2$
- Cholesky: $n^2(m + \frac{n}{3})$
- Householder: $2n^2(m + \frac{n}{3})$
- Givens-Rotation: $3n^2(m + \frac{n}{3})$

Updaten der Methode der kleinsten Quadrate

- A und b werden in Echtzeit gemessen.
 - ➔ zu Zeit und Rechenaufwändig immer komplette Zerlegung durchzuführen
- Neuerungen werden in Vektor $(a^T \quad \beta)$ gespeichert
- $\min_x \left\| \begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix} \right\|$
- $(A \quad b) \rightarrow H^T (A \quad b) = \begin{pmatrix} R & H_1^T b \\ 0 & H_2^T b \end{pmatrix}$

Updaten der Methode der kleinsten Quadrate

- $(A \quad b) \rightarrow Q^T (A \quad b) = \begin{pmatrix} R & H_1^T b \\ 0 & H_2^T b \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} A & b \\ a^T & \beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Q^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ a^T & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & H_1^T b \\ 0 & H_2^T b \\ a^T & \beta \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} \tilde{R} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$
 $\rightarrow \tilde{R}x = \tilde{b}_1$



Noch Fragen?

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Literaturverzeichnis

L. Eldén:

Matrix methods in data mining and pattern recognition.

Volume 4, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2007.

URL:

http://www.math.uni-frankfurt.de/~numerik/lehre/Seminare/ProSem_MA_SS11/LS1.pdf

<http://people.inf.ethz.ch/arbenz/MatlabKurs/node41.html>

http://www.math.uni-frankfurt.de/~numerik/lehre/Seminare/ProSem_MA_SS11/qrzerlegung.pdf

https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.070/ws11_12/Numerik1/numerik1a_skript.pdf