Orthogonalität

Von Marc Neuner, 18.11.2015

Proseminar

Matrixmethoden in Datenanalyse und Mustererkennung

Wintersemester 2015/2016

Gliederung

- Einstieg: Gute und schlechte Basisvektoren
- Mathematische Grundlagen
- Dreiecksmatrizen
  - Durch Givens-Rotation
  - Durch Householder-Spiegelung
- Komplexität
- Stabilität

Gute und schlechte Basisvektoren

MdM_Vortrag_Basis.ggb

Mathematische Grundlagen

Mathematische Grundlagen

- $x \perp y \quad \Longleftrightarrow \quad x^T y = 0 \quad \mathrm{x,y} \in \mathbb{R}^n$
- $q_1, \dots, q_n \; orthogonal \; \in \; \mathbb{R}^n \; \Longrightarrow \quad q_1, \dots, q_n \; linear \; unabhängig$
- $q_1, \dots, q_n \; orthogonal \; \in \; \mathbb{R}^n, \|q_i\| = 1, i = 1, \dots, n$

  $\Longrightarrow q_1, \dots, q_n \; orthonormal$

- $q_1, \dots, q_n \; orthonomal \; \Longrightarrow \quad Q = (q_1 \; \dots \; q_n) \in \mathbb{R}^{n \times n} orthogonal$

Mathematische Grundlagen

- $Q \in \mathbb{R}^{n\times n} orthogonal \quad \Longrightarrow \quad Q^TQ = QQ^T = I \quad \Rightarrow \quad Q^T = Q^{-1}$
- $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n} orthogonal \quad \Longrightarrow Q_1Q_2 = Q \in \mathbb{R}^{n\times n}\ orthogonal$
- $\|Qx\|_2^2 = \|x\|_2^2 \ , \ \ x \in \mathbb{R}^n \ , \ \ Q \in \mathbb{R}^{n\times n}\ orthogonal$
- $\|UAV\|_2 = \ \|A\|_2 \ , \ \ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ , \ \ U,V \in \mathbb{R}^{n\times n}\ orthogonal$

Dreiecksmatrizen

Dreiecksmatrizen
Givens-Rotation

- Matrix-Vektor-Multiplikation: Streckung oder Drehung des Vektors
- Idee: Eliminieren eines Elements des Vektors
- Drehmatrix: $\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
- Übertragung auf Matrix: Dreiecksgestalt durch Givens-Rotation

Dreiecksmatrizen
Givens-Rotation

- Rotationsmatrix (eliminiert das Element a_{kl} der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

$$G_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & c & & & s & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & -s & & & c & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$g_{kl} = -s, \qquad g_{lk} = s$$

$$g_{kk} = g_{ll} = c$$

$$s = \frac{a_{kl}}{\sqrt{a_{kk}^2 + a_{ll}^2}}, \qquad \mathrm{c} = \frac{a_{ll}}{\sqrt{a_{kk}^2 + a_{ll}^2}}$$

Dreiecksmatrizen
Givens-Rotation

- Rotationsmatrix operiert auf Spalten $G_{kl}A = (G_{kl}a_1| \dots |G_{kl}a_n)$
- Sukzessives Eliminieren von Elementen $\neq 0$ unter der Diagonalen

$$A = \begin{pmatrix} \ast & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ast \\ \ast & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ast & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ast \end{pmatrix} \rightsquigarrow G_{21}A = \begin{pmatrix} \ast & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ast \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \ast & \ast & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ast & \ast & \cdots & \cdots & \ast & \ast \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow$$

$$G_{n1} \dots G_{21}A = \begin{pmatrix} \ast & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ast \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ast & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & \ast & \ddots & & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ast & \ast & \cdots & \ast & \ast \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \mathrm{GA} = \begin{pmatrix} \ast & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ast \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ast \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrizen
Householder-Spiegelung

- Idee: $Px = y$ mit $\mathrm{P} = \mathrm{I} - \frac{2}{v^T v} vv^T = I - \frac{2}{\|v\|_2^2} vv^T$
- Wähle: $y = \|x\|_2 e_1$ und $\mathrm{v} = \mathrm{x} - \mathrm{y} = \mathrm{x} \pm \|x\|_2 e_1$

Wir eliminieren alle bis auf das erste Element eines Vektors ohne seine Norm zu verändern!

Dreiecksmatrizen
Householder-Spiegelung

- Übertragung auf Matrix

$$A = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & * & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * & * \end{pmatrix} \rightsquigarrow P_1 A = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & * & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & * & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow P_n \ldots P_1 \mathrm{A} = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

Komplexität

- Householder-Spiegelung und Givens-Rotation für eine $n \times n \ - Matrix$

  $\mathcal{O}(n^3)$
- Householder im Allgemeinen effizienter
- Dünnbesetzte Matrix → Givens-Rotation

Stabilität

- Householder-Spiegelung:

$$\left\|P - \hat{P}\right\|_2 = \mathcal{O}(\mu)$$

$$fl\left(\hat{P}A\right) = P(A + E) \ , \qquad \|E\|_2 = \mathcal{O}(\mu\|A\|_2)$$

- Givens-Rotation:

$$\text{ähnliche } Ergebnisse$$

Quellen

- L. Eldén:
  Matrix methods in data mining and pattern recognition.
  Volume 4, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM),
  Philadelphia, PA, 2007.
- H. R. Schwarz, N. Köckler:
  Numerische Mathematik.
  6.,überarbeitete Auflage,
  Wiesbaden, Teubner, 2006.
- R. Plato:
  Numerische Mathematik kompakt.
  Grundlagenwissen für Studium und Praxis, 4., aktualisierte Auflage,
  Wiesbaden, Vieweg + Teubner, 2010.
- S. Weißer:
  Praktische Mathematik.
  Vorlesung,
  SS 2015