

71 Multivariate Verteilungen und Summen von Zufallsvariablen

71.1 Motivation

Manchmal möchte man das Zusammenwirken mehrerer Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ studieren. Gibt es in diesem „multivariaten“ Fall Aussagen über die gemeinsame Verteilung? Lassen sich Aussagen über die Verteilung der Summe von Zufallsvariablen treffen?

71.2 Wichtige Definitionen

Mehrere Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ fasst man zu einem Vektor $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$ zusammen. Im kontinuierlichen Fall ist die resultierende Dichte eine Funktion mehrerer Variabler. Für diese gemeinsame Dichte gilt:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &\geq 0 \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \\ \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n &= 1 \\ P(a_1 \leq X_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq X_n \leq b_n) &= \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Ferner betrachtet man die multivariate Verteilungsfunktion

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n.$$

Statt eines einzelnen Erwartungswerts hat man einen Erwartungswertvektor

$$\mu = (E(X_1), \dots, E(X_n))^\top.$$

Varianzen und Kovarianzen fasst man zu einer symmetrischen und positiv definiten Kovarianzmatrix zusammen

$$\Sigma = \begin{pmatrix} V(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & V(X_2) & & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & & \ddots & \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & & & V(X_n) \end{pmatrix}$$

Die wichtigste multivariate Verteilung ist die multivariate Normalverteilung ($N_n(\mu, \Sigma)$ -Verteilung):

Sei $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$ ein Vektor von normalverteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert

$\mu = (E(X_1), \dots, E(X_n))^\top$ und Kovarianzmatrix Σ , dann besitzt die multivariate Normalverteilung die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)} \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

71.3 Beispiel

Eine Apfelbaumplantage mit gleich alten Bäumen werde durch 3 normalverteilte Zufallsvariablen beschrieben:

X_1 : Höhe eines Baumes [m] $N(4, 1)$ -verteilt

X_2 : Ertrag [kg] $N(20, 100)$ -verteilt

X_3 : Zahl der Blätter [1000 Stück] $N(20, 225)$ -verteilt.

Diese Zufallsvariablen seien korreliert mit

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = 9$$

$$\text{Cov}(X_1, X_3) = 12,75$$

$$\text{Cov}(X_2, X_3) = 120.$$

Dann liegt eine $N_3(\mu, \Sigma)$ -Verteilung vor mit

$$\mu = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 12,75 \\ 9 & 100 & 120 \\ 12,75 & 120 & 225 \end{pmatrix}.$$

Kann man unter geeigneten Voraussetzungen die gemeinsame Dichte $f(x_1, \dots, x_n)$ aus den einzelnen Dichten $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$ berechnen?

Man kann zeigen:

71.4 Satz: (Gemeinsame Dichte unabhängiger Zufallsvariablen)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige(!) Zufallsvariablen mit Dichten $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$, so hat $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$ die gemeinsame Dichte

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n) \quad (*).$$

Hat umgekehrt $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$ eine gemeinsame Dichte in der Produktdarstellung (*), so sind $X_1, \dots, X_n$ unabhängig.

71.5 Beispiel

Zwei unabhängige Zufallsvariablen X_1, X_2 seien $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ - bzw. $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ -verteilt. Da Unabhängigkeit Unkorreliertheit impliziert (vgl. 67.22.(c)), hat die Kovarianzmatrix Diagonalgestalt:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Mit $\det \Sigma = \sigma_1^2 \sigma_2^2$ und $\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{pmatrix}$ hat $X = (X_1, X_2)^\top$ nach 71.2 eine multivariate Normalverteilung mit Dichte

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2}[(x_1 - \mu_1)^2/\sigma_1^2 + (x_2 - \mu_2)^2/\sigma_2^2]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} e^{-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2} e^{-\frac{(x_2 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}. \end{aligned}$$

Dies ist gerade das Produkt der zwei einzelnen Dichten $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$.

Gibt es Aussagen über die Dichte, wenn man die Summe zweier Zufallsvariablen betrachtet? Hierzu benötigen wir

71.6 Definition: (Faltung)

Falls für die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ das Integral

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

existiert, so nennen wir $f * g$ die Faltung von f und g (engl.: convolution).

71.7 Satz: (Summe unabhängiger kontinuierlicher Zufallsvariabler)

Seien X_1, X_2 unabhängige kontinuierliche Zufallsvariable mit den Dichten f_1, f_2 , so hat $X_1 + X_2$ die Dichte $f_1 * f_2$.

Beweis:

Mit $B := \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \leq s\}$ ergibt sich für die Verteilung von $X_1 + X_2$:

$$P(X_1 + X_2 \leq s) = \iint_B \underbrace{f_1(x_1)f_2(x_2)}_{\text{Unabh.}} dx_1 dx_2$$

Mit der Substitution $u := x_1 + x_2$ folgt:

$$P(X_1 + X_2 \leq s) = \int_{-\infty}^s \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(u-x_2)f_2(x_2) dx_2 \right)}_{(f_1 * f_2)(u)} du$$

□

Hiermit läßt sich beweisen:

71.8 Satz: (Summe unabhängiger normalverteilter Zufallsvariabler)

Seien X_1, X_2 unabhängige kontinuierliche Zufallsvariablen mit $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ - bzw. $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ -Verteilung. Dann ist $X = X_1 + X_2$ ebenfalls $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt, und es gilt:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_1 + \mu_2 \\ \sigma^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2. \end{aligned}$$

Auch im Fall diskreter Zufallsvariablen gibt es vergleichbare Aussagen zu 71.6-71.8:

71.9 Definition: (Diskrete Faltung)

Für $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}}, g = (g_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ definiert man die diskrete Faltung von f und g durch

$$(f * g)_i := \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{i-j}g_j.$$

71.10 Satz: (Summe unabhängiger diskreter Zufallsvariabler)

Seien X_1, X_2 unabhängige diskrete, $\mathbb{Z}$ -wertige Zufallsvariablen mit Verteilungen P_{X_1}, P_{X_2} . Dann hat $X_1 + X_2$ die Verteilung $P_{X_1} * P_{X_2}$ (kurz: $P_{X_1+X_2} = P_{X_1} * P_{X_2}$), wobei $*$ die diskrete Faltung bezeichnet.

71.11 Satz: (Summe unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsvariabler)

Seien X_1, X_2 unabhängige diskrete Zufallsvariablen, die einer Poisson-Verteilung mit Parameter λ_1 bzw. λ_2 genügen (kurz: $P(\lambda_1)$ - bzw. $P(\lambda_2)$ -verteilt). Dann ist $X_1 + X_2$ $P(\lambda_1 + \lambda_2)$ -verteilt.

71.12 Beispiel

Beim radioaktiven Zerfall einer Substanz werden ionisierende Teilchen frei. Mit einem Geiger-Müller-Zählrohr zählt man die innerhalb einer Minute eintreffenden Teilchen. Deren Anzahl ist Poisson-verteilt. Hat man zwei radioaktive Substanzen mit Poisson-Verteilung $P(\lambda_1)$ bzw. $P(\lambda_2)$, so genügt die Gesamtheit der pro Zeitintervall produzierten Teilchen einer $P(\lambda_1 + \lambda_2)$ -Verteilung.