

## Präsenzübungsblatt 11

Übungstermine: 21./22. Januar 2008

### Aufgabe 1

Wir betrachten für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die univariate *kontinuierliche* Zufallsvariable  $X_n$  mit der Dichte

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & |x| \leq \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem sei  $Y$  eine *diskrete* Zufallsvariable, die stets den Wert 0 annimmt.

- (a) Überlegen Sie, wie eine für alle reellen Zahlen  $x$  definierte Verteilungsfunktion  $F_Y(x)$  für  $Y$  definiert werden kann.
- (b) Skizzieren Sie die Dichtefunktionen der Zufallsvariablen  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$ .
- (c) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  und  $Y$ .
- (d) Zeigen Sie, dass die Folge der  $X_n$  *in der Verteilung* gegen  $Y$  konvergiert, das heißt, dass die Verteilungsfunktionen der  $X_n$  an allen Stetigkeitsstellen von  $F_Y$  punktweise gegen  $F_Y$  konvergieren.

### Aufgabe 2

Die bivariate Zufallsvariable  $(X_1, X_2)$  sei normalverteilt, wobei die univariaten Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  nicht notwendig unabhängig seien.

Zeigen Sie: Es gibt zwei univariate Zufallsvariable  $Y$  und  $Z$  mit folgenden Eigenschaften:

- $Y$  und  $Z$  sind Linearkombinationen von  $X_1$  und  $X_2$

- $Y$  und  $Z$  sind normalverteilt
- $Y$  und  $Z$  sind unabhängig.