Mathematik für Informatiker III

Universität des Saarlandes — Dr. Bernhard Burgeth
Wintersemester 2007/08 — Dr. Martin Welk

Hausübungsblatt 9

Abgabe: Freitag, 11. Januar 2008, **vor** der Vorlesung

Aufgabe 1

Beim Roulettespiel wird durch ein Zufallsexperiment eine der Zahlen $0, 1, \dots, 36$ als Gewinnzahl ermittelt, wobei diese Zahlen gleich wahrscheinlich sind.

Ein Spieler, der einen Einsatz von n Euro auf eine der Zahlen $0, 1, \dots, 36$ setzt, erhält $36n$ Euro zurück, wenn diese Zahl Gewinnzahl wird, und verliert andernfalls den Einsatz.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, auf „Pair“ oder „Impair“ zu setzen: Sind n Euro auf „Pair“ gesetzt, so erhält der Spieler den doppelten Einsatz, wenn eine gerade Zahl ungleich 0 gezogen wird, und verliert andernfalls. Analog bringt ein Einsatz auf „Impair“ bei einer ungeraden Gewinnzahl das Doppelte zurück und verliert sonst.

(a) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz des Gewinns bei einem Einsatz von 100 Euro auf einer Zahl.

(b) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz des Gewinns bei einem Einsatz von 100 Euro auf „Pair“.

(c) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz des Gesamtgewinns bei einem Einsatz von je 50 Euro auf „Pair“ in einer Runde und nochmals 50 Euro auf „Impair“ in der nächsten Runde.

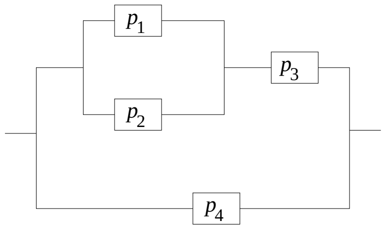
(d) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz des Gewinns bei einem Einsatz von 50 Euro auf der Zahl 9 und 50 Euro auf „Impair“ in derselben Runde.

(e) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz des Gewinns bei einem Einsatz von 50 Euro auf der Zahl 9 und 50 Euro auf „Pair“ in derselben Runde.

(f) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz des Gewinns bei einem Einsatz von 50 Euro auf „Pair“ und 50 Euro auf „Impair“ in derselben Runde.

(2+2+2+2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2



(a) Bestimmen Sie die Zuverlässigkeit der oben abgebildeten Schaltung aus vier Schaltkreisen, wenn für die Zuverlässigkeiten der einzelnen Schaltkreise gilt

$$p_1 = \frac{6}{10}, \quad p_2 = \frac{7}{10}, \quad p_3 = \frac{8}{10}, \quad p_4 = \frac{9}{10}.$$

(b) Spock baut eine Parallelschaltung aus n identischen Relais auf, deren Zuverlässigkeit jeweils $\frac{1}{n}$ (für $i = 1, \ldots, n$) beträgt (also von der Gesamtzahl der Relais abhängt). Er behauptet, dass die Zuverlässigkeit der gesamten Schaltung gegen 1 strebt, wenn n gegen $+\infty$ geht, obwohl die Zuverlässigkeit der einzelnen Relais gegen Null tendiert. Hat er Recht? Berechnen Sie den Grenzwert der Zuverlässigkeit.

(c) Bei einem Flachbildschirm mit 1920×1280 Pixeln hat jedes Pixel i eine Ausfallwahrscheinlichkeit 10^{-6}. Geben Sie eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, dass bei diesem Bildschirm mehr als 6 Pixel defekt sind, indem Sie die einfache Markow-Ungleichung benutzen.

(d) Geben Sie eine obere Schranke für dieselbe Wahrscheinlichkeit wie in (c) an, indem Sie die Abschätzung von Chernoff benutzen.

(2+2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3

Ein Nachrichtenkanal empfängt eine anscheinend zufällige Folge von Nullen und Einsen (also $P_{X_k}(0) = P_{X_k}(1) = \frac{1}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, wenn die Zufallsvariable X_k die Ziffer an der k-ten Stelle angibt). Es sei S_n die Anzahl der Einsen in einer derartigen Folge der Länge n. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die mittlere Anzahl der Einsen $\frac{S_n}{n}$ von $\frac{1}{2}$ um weniger als 0,1 abweicht, nach unten ab, wenn

(a) $n = 100$ gilt,

(b) n gegen $+\infty$ strebt.

(3+1 Punkte)