

Präsenzübungsblatt 7

Übungstermine: 10./11. Dezember 2007

Aufgabe 1

Im Folgenden sei \mathcal{A} eine σ -Algebra über der (Ergebnis-) Menge Ω .

- (a) Zeigen Sie: Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen, $A_n \in \mathcal{A}$, so ist auch

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} .$$

- (b) Zeigen Sie: Ist $(A_n)_{n=1}^N$ eine endliche Folge von Ereignissen $A_n \in \mathcal{A}$, so gibt es eine endliche Folge $(B_m)_{m=1}^M$ von Ereignissen $B_m \in \mathcal{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Ereignisse B_m sind paarweise disjunkt, also

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{für } i, j \in \{1, \dots, M\} \text{ mit } i \neq j .$$

- Jedes Ereignis A_n ist Vereinigung von Ereignissen aus (B_m) , d. h. es gibt (zu jedem gegebenen n) eine Folge $(m_k)_{k=1}^N$ natürlicher Zahlen mit

$$A_n = \bigcup_{k=1}^M B_{m_k} .$$

- (c) In jedem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) gelten für beliebige $A, B \in \mathcal{A}$ stets die Identitäten

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) , \\ P(\bar{A}) = 1 - P(A) .$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie: Sind \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei σ -Algebren über derselben Ergebnismenge Ω , so ist auch $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ eine σ -Algebra über Ω .