

Mathematik für Informatiker III

Universität des Saarlandes
Wintersemester 2007/08

Dr. Bernhard Burgeth
Dr. Martin Welk

Hausübungsblatt 6

Abgabe: Freitag, 7. Dezember 2007, **vor** der Vorlesung

Aufgabe 1

- (a) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Differentialgleichung zu dem Variationsproblem

$$I(y(x)) := \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \stackrel{!}{=} \text{Min}$$

für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $y(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ her.

- (b) Zeigen Sie, dass lineare Funktionen $y(x)$ diese Differentialgleichung erfüllen.

Bemerkung: Das zu minimierende Funktional $I(y(x))$ beschreibt gerade die euklidische Länge der Kurve der Funktion $y(x)$ über dem Intervall $[a, b]$. Dass lineare Funktionen die Differentialgleichung erfüllen, beweist, dass Geraden Kurven minimaler Länge zwischen ihren Endpunkten sind.

(7+3 Punkte)

→

Aufgabe 2

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) := (e^x + e^y, e^x - e^y)^T$$

in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lokal injektiv ist. Geben Sie die Koordinatenfunktionen einer lokalen Umkehrfunktion f^{-1} an.

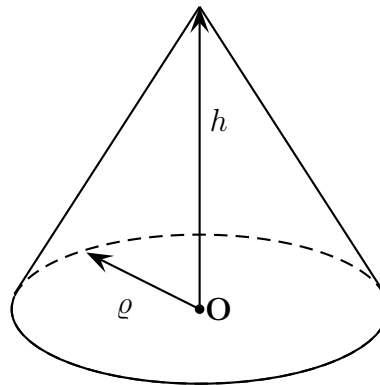
- (b) Bestimmen Sie die Matrizen $Jf(x, y)$ und $Jf^{-1}(u, v)$.
(c) Prüfen Sie nach, dass der Umkehrsatz erfüllt ist.

Hinweis: Achten Sie bei (c) darauf, Jf und Jf^{-1} an den richtigen Stellen auszuwerten!

(4+2+2 Punkte)

Aufgabe 3

Gegeben sei ein gerader Kreiskegel, dessen Grundfläche ein Kreis um den Koordinatenursprung O der Ebene mit dem Radius ρ ist. Seine Höhe betrage h (siehe Skizze).



- (a) Stellen Sie die Mantelfläche des Kreiskegels (das heißt seine Oberfläche ohne die Grundfläche) durch eine Funktion zweier Variablen *in Polarkoordinaten* dar.
(b) Berechnen Sie das Volumen des Kegels mit Hilfe der Darstellung aus (a).

(2+4 Punkte)