Mathematik für Informatiker III

Universität des Saarlandes — Dr. Bernhard Burgeth
Wintersemester 2007/08 — Dr. Martin Welk

Präsenzübungsblatt 3

Übungstermine: 12./13. November 2007

Aufgabe 1

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *homogen vom Grad* $p \in \mathbb{N}$, wenn für jedes $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $f(tx) = t^p\, f(x)$ erfüllt ist.

a) Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3 + x^2 y + y^3 \\ g(x,y) &= \sqrt{xy}\ . \end{aligned}$$

Ist f eine homogene Funktion, wenn ja, von welchem Grad?
Ist g eine homogene Funktion, wenn ja, von welchem Grad?

b) Bestimmen Sie für die Funktion f aus (a) für jeden Punkt $(x_0, y_0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Richtungsableitung

$$\partial_v f(x_0, y_0)$$

in Richtung des Vektors

$$v = \frac{(x_0, y_0)^{\mathrm{T}}}{\|(x_0, y_0)^{\mathrm{T}}\|}\ .$$

c) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und homogen vom Grad $p \in \mathbb{N}$, so gilt für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, \nabla f(x) \rangle = p\, f(x)\ .$$

Hinweis: Stellen Sie x in der Form $x = \|x\|\, v$ mit einem Vektor v der Länge 1 dar und bestimmen Sie zunächst die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$. Benutzen Sie dazu die Definition der Richtungsableitung, oder betrachten Sie $f(tx)$ als Funktion von t!

Aufgabe 2

Es sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ein C^2-Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$. Beweisen Sie die Identität

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} v = \nabla \operatorname{div} v - \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix} .$$