Mathematik für Informatiker III

Universität des Saarlandes — Dr. Bernhard Burgeth
Wintersemester 2007/08 — Dr. Martin Welk

Hausübungsblatt 3

Abgabe: Freitag, 16. November 2007, **vor** der Vorlesung

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}\ , \qquad x,y \in (0,+\infty)\ .$$

a) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von f im Punkt $(1;1)$ bis einschließlich der Glieder 2. Ordnung.

Geben Sie auch das Lagrange-Restglied an.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der unter (a) gewonnenen Taylorentwicklung einen Näherungswert für $f(1{,}2\,;\ 0{,}9)$.

(6+1 Punkte)

Aufgabe 2

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x^3 + xy\ .$$

Bestimmen Sie die zweite Ableitung in Richtung des Vektors $v := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^{\mathrm{T}}$, d. h. $\partial_{vv} f := \partial_v(\partial_v f)$, als Funktion von x und y.

b) Bestimmen Sie für die Funktion f und den Vektor v aus (a) die Hessematrix $\mathrm{H}f$ sowie das Produkt $v^{\mathrm{T}}\,(\mathrm{H}f)\,v$.

c) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor der Länge 1, so gilt stets

$$\partial_{vv} f = v^{\mathrm{T}}\,(\mathrm{H}f)\,v\ .$$

(3+3+3 Punkte)

Aufgabe 3

Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,, \qquad f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}y^3 \\ \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 \\ x - y - 1 \end{pmatrix} \,,$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,, \qquad g(u,v,w) = \mathrm{e}^{uvw} \,.$$

a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen von f und g.

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von

$$h := g \circ f : \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

an der Stelle $(1, -1)$ bis zur 1. Ordnung.

(5+3 Punkte)