Mathematik für Informatiker III

Universität des Saarlandes — Dr. Bernhard Burgeth
Wintersemester 2007/08 — Dr. Martin Welk

Hausübungsblatt 2

Abgabe: Freitag, 9. November 2007, **vor** der Vorlesung

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen:

a)
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\mathrm{e}^{-t^2}, \mathrm{e}^t, \cos(2t))^{\mathrm{T}}$$

b)
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x_1^2 - x_2^2}$$

c)
$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_2 \cdot 2^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}\ .$$

(3+3+3 Punkte)

Aufgabe 2

a) Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.
Zeigen Sie: Für alle $x \in D$ gilt
$$\operatorname{rot} \nabla f(x) = 0\ .$$

b) Das Potentialfeld F um eine elektrische Ladung Q im Punkt $0 \in \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch
$$F(x) = -\,Q\,\frac{x}{|x|^3}, \quad x \in D := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\ .$$
Zeigen Sie, dass F in D wirbelfrei ist, d. h. $\operatorname{rot} F(x) = 0$ für alle $x \in D$.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 3

Zeigen Sie: Die Funktion

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}} \quad \text{auf} \quad D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

ist eine Lösung der Diffusionsgleichung

$$u_t = u_{xx}$$

auf D.

(5 Punkte)

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion (vgl. Hausübungsblatt 1, Aufg. 2c)

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \ .$$

Bestimmen Sie für jeden Punkt $(x_0, y_0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Richtungsableitung

$$\partial_v f(x_0, y_0)$$

in Richtung des Vektors

$$v = \frac{(x_0, y_0)^{\mathrm{T}}}{\|(x_0, y_0)^{\mathrm{T}}\|} \ .$$

(4 Punkte)