

Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß
Sommersemester 2007

Probeklausur – Musterlösungen

Aufgabe 1

a) Wir zeigen, dass $\psi \circ \varphi$ die Homomorphismus-Eigenschaft besitzt, das heißt für beliebige $x, y \in H$ gilt

$$(\psi \circ \varphi)(x \cdot y) = (\psi \circ \varphi)(x) \bullet (\psi \circ \varphi)(y), \quad (1)$$

mit Verknüpfungen $\cdot : H \times H \rightarrow H$, $*$: $K \times K \rightarrow K$ und $\bullet : L \times L \rightarrow L$. Wir zeigen nun, dass $\psi \circ \varphi$ Gleichung (1) erfüllt:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(x \cdot y) &= \psi(\varphi(x \cdot y)) \\ &= \psi(\varphi(x) * \varphi(y)) \\ &= \psi(\varphi(x)) \bullet \psi(\varphi(y)) \\ &= (\psi \circ \varphi)(x) \bullet (\psi \circ \varphi)(y). \end{aligned}$$

□

b) Wir zeigen, dass φ^{-1} die Homomorphismus-Eigenschaft besitzt, das heißt für beliebige $x, y \in K$ gilt

$$\varphi^{-1}(x \cdot y) = \varphi^{-1}(x) \bullet \varphi^{-1}(y),$$

mit Verknüpfungen $\cdot : K \times K \rightarrow K$ und $\bullet : H \times H \rightarrow H$. Zur einfacheren Notation definieren wir

$$\begin{aligned} u &:= \varphi^{-1}(x \cdot y) \\ v &:= \varphi^{-1}(x) \bullet \varphi^{-1}(y), \end{aligned}$$

es genügt also $u = v$ zu zeigen:

Da φ^{-1} Umkehrabbildung von φ ist, haben wir $\varphi(u) = x \cdot y$. Betrachten wir nun

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \varphi(\varphi^{-1}(x) \bullet \varphi^{-1}(y)) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(x)) \cdot \varphi(\varphi^{-1}(y)) \\ &= x \cdot y \\ &= \varphi(u). \end{aligned}$$

Damit haben wir $\varphi(v) = \varphi(u)$ gezeigt, welches wir nun benutzen können, um schließlich $u = v$ zu zeigen:

$$\begin{aligned} u &= \varphi^{-1}(x \cdot y) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(v)) \\ &= v. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2

a) Wir zeigen (\mathbb{Z}_6, \odot) ist ein kommutatives Monoid:

- Abgeschlossenheit: Für $k, l \in \mathbb{Z}_6$ ist $k \odot l \in \mathbb{Z}_6$ nach Definition von \odot .

- Kommutativität: $k \odot l = l \odot k$, da $k \odot l = m$ mit $m \equiv kl \equiv lk \pmod{6}$.
- Assoziativität: $(k \odot l) \odot m = n \odot m = o = k \odot p = k \odot (l \odot m)$ mit $n \equiv kl \pmod{6}, p \equiv lm \pmod{6}, o \equiv nm \equiv klm \equiv kp \pmod{6}$.
- Einselement: 1, da $1 \odot k = m$ mit $m \equiv 1k \equiv k \pmod{6}$ und damit $1 \odot k = k$.

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_6, \odot)$ ist kommutatives Monoid.

b) Wir müssen zeigen: $(\mathbb{Z}_6, +)$ ist abelsche Gruppe, (\mathbb{Z}_6, \odot) ist kommutatives Monoid (in a) gezeigt) und es gelten die Distributivgesetze.

Kommen wir zunächst zu $(\mathbb{Z}_6, +)$:

- Abgeschlossenheit: Für $k, l \in \mathbb{Z}_6$ ist $k + l \in \mathbb{Z}_6$ nach Definition von $+$.
- Kommutativität: $k + l = l + k$, da $k + l = m$ mit $m \equiv k + l \equiv l + k \pmod{6}$.
- Assoziativität: $(k + l) + m = n + m = o = k + p = k + (l + m)$ mit $n \equiv k + l \pmod{6}, p \equiv l + m \pmod{6}, o \equiv n + m \equiv k + l + m \equiv k + p \pmod{6}$.
- Nullelement: 0, da $0 + k = m$ mit $m \equiv 0 + k \equiv k \pmod{6}$ und damit $0 + k = k$.
- inverses Element zu k : $-k \equiv 0 - k \equiv 6 - k \pmod{6}$, da $k + (-k) = m$ mit $m \equiv k + (-k) \equiv k + (0 - k) \equiv 0 \pmod{6}$ und damit $k + (-k) = 0$.

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_6, +)$ ist abelsche Gruppe.

Abschließend zeigen wir das Distributivgesetz: $k \odot (l + m) = k \odot n = o = p + q = k \odot l + k \odot m$ mit $n \equiv l + m \pmod{6}, p \equiv kl \pmod{6}, q \equiv km \pmod{6}, o \equiv kn \equiv k(l + m) \equiv kl + km \equiv p + q \pmod{6}$. Somit ist $(\mathbb{Z}_6, +, \odot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement.

Aufgabe 3

Gegeben seien die folgenden Basen des \mathbb{R}^3 , $\phi \in \mathbb{R}$:

$$B_1 = (e_1, e_2, e_3), B_2 = \left(\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\phi \\ -\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), B_3 = (e_1, e_2, e_3)$$

Wie geht man dabei vor? Seien $B = (v_1, \dots, v_n)$ und $B' = (v_1', \dots, v_n')$ zwei Basen des K -Vektorraumes V . Wir wollen den Übergang von der Basis B zu der Basis B' beschreiben. Jeder Vektor aus V kann als Linearkombination der Vektoren aus B dargestellt werden. Insbesondere gilt für alle $k = 1, \dots, n$:

$$v_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} v_i', \quad (a_{ik} \in K)$$

Der Übergang von B nach B' wird gerade durch die Matrix $A = (a_{ik} \in M(n \times n, K))$ beschrieben:

$$v = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \sum_{i=1}^n a_{ik} v_i' = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \alpha_k v_i'$$

Mit anderen Worten:

$$\kappa_{B'}(v) = A \kappa_B(v)$$

Die Matrix A heißt **Transformationsmatrix zum Basiswechsel von B nach B'** und wird oft mit $T_{B'}^B$ bezeichnet.

Berechnen Sie die Matrizen der folgenden Basiswechsel in \mathbb{R}^3 :

(a)

$B_2 \rightarrow B_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = A$$

" \Rightarrow "

$$A = T_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B_3 \rightarrow B_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = A$$

" \Rightarrow "

$$A = T_{B_3}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Wir berechnen den Rang der Matrix mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Aus §37.7 wissen wir, dass der Rang einer Matrix in Zeilen-Stufen-Form gleich der Anzahl der Leitkoeffizienten ist (Leitkoeffizienten heißen die ersten von 0 verschiedenen Einträge einer Zeile; vgl. §37.5).

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Addiere zur 2. Zeile das (-2)-fache der 1. Zeile,

Addiere zur 3. Zeile das (-3)-fache der 1. Zeile,

Addiere zur 4. Zeile das (-4)-fache der 1. Zeile,

\Downarrow

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -8 & -16 \end{pmatrix}$$

Addiere zur 3. Zeile das (-2)-fache der 2. Zeile,

Addiere zur 4. Zeile das $(-8/3)$ -fache der 2. Zeile,

\Downarrow

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die ersten beiden Zeilen sind also linear unabhängig, die restlichen beiden linear abhängig. Der Rang der Matrix ist daher also 2.

Aufgabe 5

Wir erinnern uns an den **Entwicklungssatz von Laplace**:

Satz:

Ist $n \geq 2$ und $A \in M(n \times n; K)$, so gilt für jedes $i \in 1, \dots, n$

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A'_{ij}$$

(Entwicklung nach der i-ten Zeile) und für jedes $j \in 1, \dots, n$

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A'_{ij}$$

(Entwicklung nach der j-ten Spalte). Dabei bezeichnet A'_{ij} die Streichungsmatrix, die man durch streichen der i-ten Zeile **und** der j-ten Spalte aus A erhält.

Berechnen Sie die Determinante der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir entwickeln nach der ersten Spalte von A und erhalten:

$$\begin{aligned} \det A &= 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -3 \end{aligned}$$

Wobei wir die 3×3 Matrizen mit der Regel von **Sarrus** berechnet haben.

Alternativ

Kann man direkt die erste und zweite Zeile vertauschen und danach von der dritten und vierten Zeile die erste abziehen. Die Determinante ergibt sich somit schon nach einem Entwicklungsschritt. Beachte, dass sich bei Vertauschungen von Spalten/Zeilen sich das Vorzeichen der Determinante ändert!

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -3$$

Aufgabe 6

Zu zeigen ist, dass die Abbildung

$$\det : GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$$

einen surjektiven Gruppenhomomorphismus beschreibt. Dabei ist $GL(n, \mathbb{K})$ die Gruppe aller invertierbaren $n \times n$ -Matrizen über \mathbb{K} . Erinnert sei an die Definition des Gruppenhomomorphismus und an die Surjektivität:

Definition:

Seien (G, \cdot) und (H, \circ) zwei Gruppen. Eine Funktion $f : G \rightarrow H$ heisst Gruppenhomomorphismus, wenn für alle Elemente $x, y \in G$ gilt:

$$f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$$

Lemma:

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen nichtleeren Mengen X und Y ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt, so dass $f \circ g = id_Y$. Wobei id_Y die identische Abbildung beschreibt.

Beweis:

A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. Nach dem Multiplikationssatz (also: $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$) folgt, dass \det ein Gruppenhomomorphismus in \mathbb{K}^* ist. Auf die Surjektivität lässt sich so schliessen: Sei $a \in \mathbb{K}^*$ beliebig. Sei $A = (ae_1, e_2, \dots, e_n)$, wobei (e_1, \dots, e_n) die kanonische Basis in \mathbb{K}^n ist. Dann ist $\det(A) = a$, weil in der Hauptdiagonalen an erster Stelle a und sonst nur 1 steht und alle Elemente auerhalb der Hauptdiagonalen gleich 0 sind.

□

Aufgabe 7

Zur besseren Lesbarkeit schreiben wir das euklidische Produkt hier in der Form des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (vgl. §41.2 und §41.3(a)).

$$\langle A^\top y, x \rangle \stackrel{\S 40.12}{=} (A^\top y)^\top x \stackrel{\S 36.8(a)}{=} y^\top (A^\top)^\top x = y^\top Ax = \langle y, Ax \rangle.$$

□

Aufgabe 8

(a)

Gegeben: Eine 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. es gilt

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Zu zeigen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_0^{2\pi} f(x) \, dx.$$

Anmerkung: Wir wollen hiermit zeigen dass unsere Herleitung für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten in Kapitel 43.2 für jede 2π -periodische Funktion f richtig ist, und nicht nur für den speziellen Fall, wenn wir den Vektorraum $C[0, 2\pi]$ betrachten, wie im Skript geschehen.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx &= \int_{-\pi}^0 f(x) \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \, dx && \text{[Integral Aufspaltung]} \\
 &= \int_0^{\pi} f(x) \, dx + \int_{-\pi}^0 f(x) \, dx && \text{[Kommutativität von +]} \\
 &= \int_0^{\pi} f(x) \, dx + \int_{-\pi}^0 f(x + 2\pi) \, dx && \text{[(*) in rechtem Summand]} \\
 &= \int_0^{\pi} f(x) \, dx + \int_{x=-\pi}^{x=0} f(t) \, dx && \text{[Substitution } t = x + 2\pi \text{]} \\
 &= \int_0^{\pi} f(x) \, dx + \int_{t=-\pi}^{t=2\pi} f(t) \, dt && \text{[Grenzen anpassen : } t = x + 2\pi \text{]} \\
 &= \int_0^{\pi} f(x) \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \, dx && \text{[Setze } t := x \text{ in rechtem Summand]} \\
 &= \int_0^{2\pi} f(x) \, dx. && \text{[Integral Aufspaltung rückwärts]}
 \end{aligned}$$

□

(b)

Wir sollen die Fourier-Koeffizienten von $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2$ bestimmen.

Anmerkung: Theoretisch gesehen müssen wir mit einer 2π -periodischen Fortsetzung von g arbeiten. Da g aber schon auf einem 2π breitem Intervall definiert ist, geschieht dies durch einfaches “Aneinanderhängen”, vgl. Präsenzübung 10 und Übungsblatt 10, Aufgabe 3.

Wenn man an einer detaillierten theoretische Diskussion dieses Themas interessiert ist, sei man an das Buch

“M. Wolff: Übungsaufgaben zur Mathematik für Informatiker und Bioinformatiker, Kapitel 8.1, Periodische Funktionen”,

welches im Handapparat der Bibliothek steht, verwiesen.

Wenn man sich dann die 2π -periodische Fortsetzung von g skizziert erkennt man, dass diese weder gerade noch ungerade, d.h. weder y -Achsen symmetrisch noch punktsymmetrisch zum Ursprung ist. Dies wiederum bedeutet dass (unglücklicherweise) alle Fourier-Koeffizienten ungleich null sind!

Beginnen wir nun mit der Berechnung der Fourier-Koeffizienten, vgl. Paragraph 43.3.

Hierzu zunächst ein paar Rechenregeln, die wir brauchen werden:

- Partielle integration (PI) :

$$\int_a^b u' v \, dx = \left[u v \right]_a^b - \int_a^b u v' \, dx.$$

- $\sin(k\pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, also speziell auch $\sin(0) = 0$ und $\sin(k2\pi) = 0$.
- $\cos(0) = 1$ und $\cos(k\pi) = (-1)^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, vgl. Musterlösung zu Übungsblatt 10, Aufgabe 3.

Kommen wir nun endlich zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{8\pi^3}{3} - 0 \right) \\
 &= \frac{8}{3} \pi^2.
 \end{aligned}$$

Für $k = 1, 2, \dots$ haben wir

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos(kx) \, dx \\
 &\stackrel{\text{PI}}{=} \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{x^2}{k} \sin(kx) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{2x}{k} \sin(kx) \, dx \right) \\
 &\stackrel{\text{PI}}{=} \frac{1}{\pi} \left((0 - 0) - \left[-\frac{2x}{k^2} \cos(kx) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\frac{2}{k^2} \cos(kx) \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(-\left(-\frac{4\pi}{k^2} (-1)^k + 0 \right) + \frac{2}{k^2} \left[\frac{1}{k} \sin(kx) \right]_0^{2\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{4\pi}{k^2} (-1)^k + \frac{2}{k^2} (0 - 0) \right) \\
 &= \frac{4}{k^2} (-1)^k.
 \end{aligned}$$

Schliesslich für $k = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin(kx) \, dx \\
 &\stackrel{\text{PI}}{=} \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{x^2}{k} \cos(kx) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\frac{2x}{k} \cos(kx) \, dx \right) \\
 &\stackrel{\text{PI}}{=} \frac{1}{\pi} \left(\left(-\frac{4\pi^2}{k} (-1)^k - 0 \right) + \left[\frac{2x}{k^2} \sin(kx) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{2}{k^2} \sin(kx) \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{4\pi^2}{k} (-1)^k + (0 - 0) - \frac{2}{k^2} \left[-\frac{1}{k} \cos(kx) \right]_0^{2\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{4\pi^2}{k} (-1)^k - \frac{2}{k^2} \left(-\frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{k} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{4\pi^2}{k} (-1)^k + \frac{2}{k^3} (-1)^k - \frac{2}{k^3} \right) \\
 &= -\frac{4\pi^2 k^2 (-1)^k + 2(-1)^k - 2}{\pi k^3}.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 9

Gegeben: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, deren Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n bilden. Nach Definition 44.2.2 gilt daher dass $A \in O(n)$ ist, d.h., A ist eine orthogonale Matrix.

Zu zeigen: Für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ von A gilt: $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

Beweis: Sei nun λ ein Eigenwert von A und $v \in \mathbb{R}^n$ der zugehörige Eigenvektor. Nach Definition 45.2 gilt also

$$Av = \lambda v.$$

Wenn wir diese Gleichung quadrieren erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (Av)^2 &= (\lambda v)^2 \\
 \Leftrightarrow \langle Av, Av \rangle &= \lambda^2 \langle v, v \rangle \\
 \Leftrightarrow |Av|^2 &= \lambda^2 |v|^2.
 \end{aligned}$$

Wobei die letzte Zeile aus einer direkten Konsequenz der Definition der euklidischen Norm, 40.5:

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} \Rightarrow |v|^2 = v_1^2 + \dots + v_n^2 = \langle v, v \rangle$$

folgt.

Da $A \in O(n)$ gilt, erfüllt A die Isometrie-Eigenschaft 44.3.d): $|Av| = |v|$ und somit durch quadrieren auch $|Av|^2 = |v|^2$.

Wenn wir dies in der letzten Zeile unserer Herleitung benutzen erhalten wir

$$|Av|^2 = \lambda^2 |v|^2 \stackrel{\text{Isometrie}}{=} |v|^2,$$

was nur gilt wenn $\lambda^2 = 1$ ist. Daher muss $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ gelten, was zu zeigen war!

□