Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß

Sommersemester 2007

Probeklausur

Dieses Aufgabenblatt ist im Umfang einer dreistündigen Klausur angeglichen. Numerische Berechnungen sind per Hand auszuführen.

Aufgabe 1

Seien H, K und L Halbgruppen, $\varphi : H \to K$ und $\psi : K \to L$ seien Homomorphismen.

(a) Zeigen Sie, dass dann die Hintereinanderausführung $\psi \circ \varphi$ einen Homomorphismus definiert.

(b) Sei φ sogar ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass φ^{-1} die Homomorphieeigenschaft hat.

(8 Punkte)

Aufgabe 2

In $\mathbb{Z}_6$ sei eine multiplikative Verknüpfung gegeben durch $k \odot l = m$, $m \equiv kl \mod 6$.

Beweisen Sie:

(a) $(\mathbb{Z}_6, \odot)$ ist ein kommutatives Monoid mit 1 als neutralem Element.

(b) $(\mathbb{Z}_6, +, \odot)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.

(12 Punkte)

Aufgabe 3

Gegeben seien die folgenden Basen des $\mathbb{R}^3$, $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$B_1 = (e_1, e_2, e_3)\ , \quad B_2 = \left(\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad B_3 = (e_1, e_3, e_2)\ .$$

Berechnen Sie die Matrizen der folgenden Basiswechsel in $\mathbb{R}^3$:

(a) $B_2 \to B_1$

(b) $B_3 \to B_1$

(8 Punkte)

Aufgabe 4

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} .$$

Benutzen Sie den Gauß-Algorithmus zur Bestimmung des Ranges von A.

(8 Punkte)

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Führen Sie dabei mit Hilfe geeigneter Umformungen und des Laplaceschen Entwicklungssatzes die Berechnung der Determinante der (4×4)-Matrix A auf die Berechnung der Determinante einer (3×3)-Matrix zurück.

(8 Punkte)

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \rightarrow (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 7

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$ sowie das euklidische Produkt $\cdot$ im $\mathbb{R}^n$.

Beweisen Sie, dass $A^T y \cdot x = y \cdot Ax$ gilt.

(6 Punkte)

Aufgabe 8

(a) Beweisen Sie, dass für eine 2π-periodische Funktion f die Beziehung

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

gilt.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten der Funktion $g(x) = x^2$ auf $(0, 2\pi)$.

(10 Punkte)

Aufgabe 9

Sei $A \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$ eine Matrix, deren Spalten eine Orthonormalbasis bilden.

Beweisen Sie: A hat die Eigenwerte 1 oder -1.

(10 Punkte)