

Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß
Sommersemester 2007

Lösungen zu den Aufgaben der Präsenzübung 9

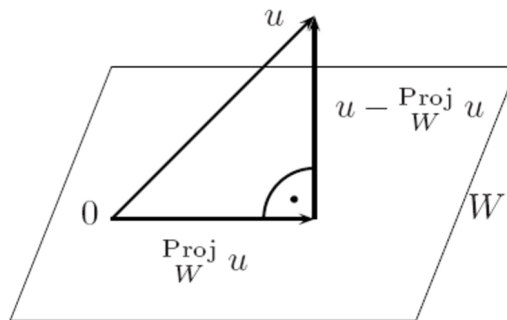
Zu Aufgabe 1

Sei W ein m -dimensionaler linearer Unterraum des n -dimensionalen euklidischen Vektorraums V (d.h. es gilt schon mal $m < n$). Wir können uns die Projektion des Raumes auf den Unterraum wie folgt vorstellen (heruntergebrochen auf $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \mathbb{R}^2$): Sei nun u ein beliebiger Punkt im \mathbb{R}^3 (siehe Bild). Unsere orthogonale Projektion bildet diesen Punkt ab auf die Ebene, beschrieben als Unterraum U . Ein Beispiel für eine solche Projektionsmatrix im \mathbb{R}^3 auf die $x_1 - x_2$ -Ebene sähe wie folgt aus:

$$P_{x_1, x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier erkennt man auch leicht an diesem Beispiel, dass eine Projektion mit einem Informationsverlust behaftet ist, in diesem Fall würden wir die Tiefeninformation in x_3 -Richtung verlieren. (Analog: siehe §42.18)

Zurück zu unserem ursprünglichen Problem. Die orthogonale Projektion, die wir suchen, soll also den Vektorraum V auf eine Hyperebene des Unterraums W abbilden.



Alternativ können wir dieses Problem auch als Minimierungsproblem ansehen, d.h. wir suchen zu dem Punkt $u \in V$ ein passendes Element $w = \text{Proj}_W u \in W$, welches u am besten approximiert, d.h. für das der Abstand $\|u - w\|$ minimal ist. Im folgenden bezeichnen wir $\text{Proj}_W u =: P(u)$. Diese Projektion P kann nun bzgl. einer beliebigen Basis (v_1, \dots, v_m) von W wie folgt dargestellt werden:

$$P(u) := \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i.$$

Ausgehend von unserem Beispiel weiter oben, sehen wir, dass $u - P(u)$ senkrecht auf der von W beschriebenen Hyperebene stehen muss (sonst würde die Orthogonalität nicht erfüllt werden). Insbesondere steht $u - P(u)$ senkrecht zu allen Basisvektoren von W , deshalb erhalten wir folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} \left\langle v_k, u - \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right\rangle &= 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (*) \\ \Leftrightarrow \langle v_k, u \rangle &= \left\langle v_k, \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle v_k, v_i \rangle \end{aligned}$$

Dies erzeugt ein lineares Gleichungssystem¹, bei dem man die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ bestimmen muss. Wir setzen nun für diese beliebigen Vektoren v_i unsere orthonormalen Basisvektoren (w_1, \dots, w_m) ein. Dabei fällt auf, dass einerseits die $\langle w_i, w_k \rangle$ für $i \neq k$ alle 0 sind (wegen der Orthogonalität der Basis) und die entsprechenden Werte in $\langle w_i, w_i \rangle$ sind gleich 1, wegen der Orthonormalität der Basis (siehe analog dazu den Beweis in §42.8). Dadurch ergibt sich folgende Lösung²:

$$\lambda_i = \langle w_i, u \rangle \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Also gilt für unsere Projektionsfunktion P demnach:

$$\begin{aligned} P(u) &= \sum_{i=1}^m \langle w_i, u \rangle w_i \\ &= \sum_{i=1}^m (w_i^\top u) w_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^m w_i w_i^\top \right) u \end{aligned}$$

unter Verwendung der Tatsache, dass $\langle w_i, u \rangle = w_i^\top u$ und dies ein skalares Ergebnis ist, und der damit möglichen Kommutativität des skalaren Ergebnisses des Skalarprodukts, sowie der Assoziativität. Damit haben wir also unsere Basisdarstellung der orthogonalen Projektion bzgl. der kanonischen Basis gefunden, nämlich:

$$P = \sum_{i=1}^m w_i w_i^\top.$$

Zu Aufgabe 2

Gegeben ist die Ebene E in der Hesseschen Normalform mit

$$E: \quad 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0.$$

Es gibt nun mehrere Lösungswege. Der Lösungsweg orientiert sich am Beispiel der letzten Präsenzübung, wo wir eine Basis konstruiert haben, mit der Normalen (die ja senkrecht auf der Ebene steht) als 3. Komponente, d.h. wir setzen $v_3 = (3, -2, 5)^\top$. v_3 wird nämlich im Verlauf der Rechnung ignoriert werden, denn da wir eine Projektion auf eine 2-dimensionale Ebene konstruieren, werden bei der Projektionsformel nur die Richtungsvektoren der Ebene verwendet. Diese sind bekanntlich senkrecht stehend zu der Normalen, d.h. ihr Skalarprodukt ist 0. Da die Normale bereits gegeben ist, wählen wir 2 beliebige, voneinander

¹Anmerkung: Das Gleichungssystem (*) kann man mit Hilfe der Rechenregeln des Skalarproduktes wie folgt umformen:

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_m, v_1 \rangle & \dots & \langle v_m, v_m \rangle \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten-Matrix nennt man auch Gram'sche Matrix. Sie kann unter anderem dafür verwendet werden, um die lineare Unabhängigkeit von Funktionen zu testen. Diese Matrix hat die Eigenschaft, dass für linear unabhängige Basisvektoren v_1, \dots, v_n stets regulär ist, d.h. invertierbar, daher also stets eine eindeutig bestimmbare Lösung besitzt.

²Erweitert man die Matrix so, dass sie Basis des n -dimensionalen Vektorraums V wird (anstatt des m -dimensionalen Unterraums W), dann gilt:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n \langle w_i, u \rangle w_i \\ P(x) &= \sum_{i=1}^m \langle w_i, u \rangle w_i \end{aligned}$$

Die Projektion P ist damit eine nach m Termen abgebrochene Fourier-Reihenentwicklung (siehe §43).

verschiedene Vektoren, die diese Bedingung erfüllen:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir die Gram-Schmidt-Orthonormalisierung dieser Basis, d.h. wir berechnen

$$\begin{aligned} u_1 &:= v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ u_2 &:= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{10}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 45 \\ -30 \\ -39 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Normalisiert gibt das:

$$\begin{aligned} w_1 &:= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_2 &:= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{494}} \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ -13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun wenden wir einfach die in Aufgabe 1 erarbeitete Formel für die Projektion an:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^2 w_i w_i^\top = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} (2 \ 3 \ 0) + \frac{1}{494} \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ -13 \end{pmatrix} (15 \ -10 \ -13) \\ &= \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 29 & 6 & -15 \\ 6 & 34 & 10 \\ -15 & 10 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$