Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß

Sommersemester 2007

Lösungen zu den Aufgaben der Präsenzübung

Zu Aufgabe 1

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Nach 47.2 können wir A schreiben als

$$A = U \Sigma V^T$$

mit $U, V \in \mathrm{O}(n)$ und Σ wie in 47.2 angegeben. Seien weiterhin $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte und $v_1, \ldots, v_n$ die Eigenvektoren von A. $V := (v_1 \ldots v_n)$ bildet dann ein System von orthonormalen Eigenvektoren und die Singulärwertzerlegung ist dann

$$A = V \Sigma V^T,$$

siehe Hauptachsentransformation. Dabei ist $\Sigma = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und wir erhalten sofort die Eigenwerte.

Bemerkung In 47.2 nehmen wir an, dass $s_{11} \geqslant s_{22} \geqslant \ldots \geqslant s_{nn} \geqslant 0$. Nun können aber symmetrische Matrizen auch negative Eigenwerte besitzen oder die Eigenwerte können in einer anderen Reihenfolge in Σ auftreten: Ist ein Eigenwert λ_i negativ, so können wir an seiner Stelle $-\lambda_i$ in Σ verwenden, wenn wir den entsprechenden Eigenvektor v_i durch $-v_i$ ersetzen. Durch Umstellen der Spalten von V und der Zeilen von V^T kann nun auch die Reihenfolge $s_{11} \geqslant s_{22} \geqslant \ldots \geqslant s_{nn} \geqslant 0$ erreicht werden.

Zu Aufgabe 2

Aus 47.3 wissen wir:

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

Wir tauschen den Eigenwert -1 durch 1 und den entsprechenden Eigenvektor $(4/5, -3/5)^T$ durch $-(4/5, -3/5)^T = (-4/5, 3/5)^T$ aus und erhalten somit:

$$B = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 3

Die Anwendung von B auf einen Vektor $Bx = y$ bewirkt folgendes:

1. x wird projiziert (dargestellt zur Basis $v_1, \ldots, v_n$)
2. die Vektoren werden um die Singulärwerte skaliert
3. die Darstellung von y zur Basis $u_1, \ldots, u_m$ wird berechnet (bei symmetrischen Matrizen entspricht das der Rücktransformation)