

Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß
Sommersemester 2007

Lösungen zu den Aufgaben der Präsenzübung 1

Zu Aufgabe 1

Aufgabe ist:

Zeigen Sie, dass die Menge aller gebrochen linearen Funktionen auf \mathbb{R}

$$\left\{ f_{a,b,c,d} : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

mit der Komposition \circ von Funktionen als Verknüpfung eine Gruppe ist.

Hinweis: Welche Rolle spielt die angegebene Bedingung $ad - bc \neq 0$?

Lösung. Es bezeichne G die angegebene Menge von Funktionen.

(0) *Abgeschlossenheit.* Zu zeigen ist für beliebige $f, g \in G$, dass auch $f \circ g$ in G ist.

Beweis durch Nachrechnen (nicht weiter ausgeführt). Die Eigenschaft der Ergebnisfunktion $ad - bc \neq 0$ ergibt sich aber auf einfache Weise erst mit der Herleitung dieser Bedingung (kommt noch). Darüber darf gern (nicht zu lang...) diskutiert werden, ein Ergebnis ist aber nicht zu erwarten.

(i) *Assoziativität.*

$$(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) \quad \forall g, h, f \in G.$$

Beweis der Eigenschaft durch Nachrechnen, d.h. durch Aufstellen der linken und rechten Seite obiger Gleichung in allgemeiner Form (diese sind identisch).

Notation:

$$g(x) := \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1}, \quad h(x) := \frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2}, \quad f(x) := \frac{a_3x + b_3}{c_3x + d_3},$$

Das Ergebnis nach Einsetzen lautet

$$\frac{a_2 \frac{a_3x + b_3}{c_3x + d_3} + b_2}{a_1 \frac{a_2 \frac{a_3x + b_3}{c_3x + d_3} + b_2}{c_2 \frac{a_3x + b_3}{c_3x + d_3} + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 \frac{a_3x + b_3}{c_3x + d_3} + b_2}{c_2 \frac{a_3x + b_3}{c_3x + d_3} + d_2} + d_1}.$$

(ii) *Neutrales Element.* Zu zeigen ist, dass für alle Elemente $g \in G$ ein Element $e \in G$ existiert mit $e \circ g = g$.

Sei dazu $g(x) := \frac{a_ex + b_e}{c_ex + d_e}$.

Die Bestimmungsgleichung lautet:

$$e \circ g = g \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_eg(x) + b_e}{c_eg(x) + d_e}.$$

Durch "scharfes Hingucken" sieht man direkt, dass der Satz von Parametern

$$a_e = 1, \quad b_e = 0, \quad c_e = 0, \quad d_e = 1$$

für alle $g(x) \in G$ die Bedingung für das neutrale Element erfüllt.

Fallstrick.♣ Bis hierher wurde technisch gesehen nur das *Monoid* aus (G, \circ) , Assoziativgesetz, und – mit $e \circ g = g$ – linksneutralem Element untersucht.

Das heisst – wenn die Verknüpfung nicht kommutativ ist – noch lange nicht, dass das rechtsneutrale Element aus der entsprechenden Bedingung $g \circ e_r = g$ dasselbe wie e ist, und überhaupt existieren muss.

Auch wenn für eine *Gruppe* in der Vorlesung gezeigt wurde, dass das neutrale Element (= linksneutral + rechtsneutral) eindeutig ist, folgt dieses also *noch nicht* zum jetzigen Zeitpunkt.

Stellt man die “rechtsseitige Bedingung” auf, sieht man allerdings recht schnell, dass dasselbe e vorliegt:

$$g \circ e = g \Leftrightarrow \frac{a_1 e(x) + b_1}{c_1 e(x) + d_1} \stackrel{!}{=} \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}.$$

Damit ist e das eindeutige neutrale Element des bisherigen *Monoids*.

Zum Hinweis. Spielt man (etwa rechtsseitig) ein paar Fälle mit $ad - bc = 0$ durch (z.B. $a = c = 0$, oder $b = d = 0$, ...), so sieht man, dass die Existenz eines neutralen Elementes in diesen Fällen nicht gewährleistet ist.

(iii) *Inverses Element.* Zu zeigen ist, dass zu jedem $g \in G$ ein Element $g^{-1} \in G$ existiert mit $g^{-1} \circ g = e$.

Die einfachste Berechnung funktioniert so, dass man von vornherein die Gruppeneigenschaft mit der Folgerung “linksinverses Element gleich rechtsinverses Element” unterstellt und einfach losrechnet:

$$\begin{aligned} (g \circ g^{-1})(x) = e(x) &\Leftrightarrow \frac{a_1 g^{-1}(x) + b_1}{c_1 g^{-1}(x) + d_1} = x \\ &\Leftrightarrow a_1 g^{-1}(x) + b_1 = x (c_1 g^{-1}(x) + d_1) \\ &\Leftrightarrow (a_1 - c_1 x) g^{-1}(x) = d_1 x - b_1 \\ &\Leftrightarrow g^{-1}(x) = \frac{d_1 x - b_1}{-c_1 x + a_1}. \end{aligned}$$

Fallstrick.♣ Ist eigentlich gewährleistet, dass $g^{-1}(x)$ in G (mit der Bedingung $ad - bc \neq 0$) ist?

Die Antwort lautet: Ja, denn ein Problem taucht hier nur für verschwindenden Nenner auf (wie bei anderen Elementen auch).

Auch hier gilt: Testet man Szenarien, die der Bedingung $ad - bc = 0$ genügen, so ergibt sich keine Existenz oder fehlende Eindeutigkeit des Inversen.

Zu Aufgabe 2

Aufgabe ist:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei S_n die Menge aller Bijektionen $\varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Wir versehen S_n mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung, d.h. für $\varphi, \psi \in S_n$ sei $\varphi \circ \psi$ definiert durch

$$(\varphi \circ \psi) := \varphi(\psi(k)) \quad \text{für } k \in \{1, \dots, n\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass (S_n, \circ) eine Gruppe ist.

(b) Ist S_3 abelsch?

Lösung zu (a). Straightforward nachzuweisen!

(0) *Abgeschlossenheit.* Folgt aus der Hintereinanderschaltung zweier bijektiver Abbildungen auf derselben Grundmenge.

(i) *Neutrales Element...* ist die Identitätsabbildung; Links- und Rechtsseitigkeit des neutralen Elementes (und somit die Eindeutigkeit und Existenz) sind einfach hinzuschreiben.

(ii) *Inverses Element...* ist gerade die Umkehrabbildung, diese existiert, weil es sich um Bijektionen handelt.

(iii) *Assoziativgesetz*. Ergibt sich aus

$$((\phi \circ \psi) \circ \eta)(k) = (\phi \circ \psi)(\eta(k)) = \phi(\psi(\eta(k))) = \phi((\psi \circ \eta)(k)) = (\phi \circ (\psi \circ \eta))(k).$$

Lösung zu (b). Siehe Skript 29.3., Bemerkung zu (g).

S_3 ist nicht abelsch, denn z.B. gilt mit

$$\phi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \psi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

dass

$$\phi \circ \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \psi \circ \phi.$$