

# 51 Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

## 51.1 Motivation

Die Berechnung der Eigenwerte einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  als Lösungen der charakteristischen Gleichung (vgl. Kapitel 45) ist für  $n \geq 5$  unpraktikabel, da für allgemeine Polynomgleichungen höheren als vierten Grades keine algebraische Auflösungsformel existiert. Daher sind numerische Näherungsverfahren notwendig.

## 51.2 Einfache Vektoriteration

Andere Bezeichnungen: Potenzmethode, von-Mises-Verfahren

**Idee:** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch und  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  ein beliebiger Vektor. Wir betrachten die Iterationsvorschrift

$$u_{k+1} = Au_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (*)$$

Was lässt sich über die Folge  $(u_k)$  aussagen?

Im Folgenden seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die (reellen) Eigenwerte der Matrix  $A$  und  $v_1, \dots, v_n$  zugehörige orthonormale Eigenvektoren. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit gelte  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ .

Es sei nun

$$u_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

die Darstellung von  $u_0$  bezüglich der Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Dann gilt

$$u_1 = Au_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i Av_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i.$$

Allgemein ergibt sich (vgl. Satz 45.15)

$$u_k = A^k u_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i = \lambda_1^k \left( \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} \alpha_i v_i \right).$$

Falls  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  (man sagt in diesem Falle,  $\lambda_1$  ist **dominanter Eigenwert**), so konvergiert  $\sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} \alpha_i v_i$  für  $k \rightarrow \infty$  gegen den Nullvektor (da  $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)$  geometrische Folge mit einem Quotienten betragsmäßig kleiner als 1 ist).

Ist daher der „Startvektor“  $u_0$  „allgemein“ gewählt (präzise: so, dass  $\alpha_1 \neq 0$ ), so konvergieren die Vektoren  $\frac{u_k}{\lambda_1^k}$  gegen  $\alpha_1 v_1$ , also bis auf Normierung gegen den **dominanten Eigenvektor**  $v_1$ . Die Konvergenz ist um so schneller, je kleiner die  $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|$  für  $i = 2, \dots, n$  sind.

Weiterhin konvergiert auch der Rayleigh-Koeffizient

$$R_A(u_k) = \frac{u_k^T A u_k}{u_k^T u_k} = \frac{u_k^T u_{k+1}}{u_k^T u_k}$$

gegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_A(u_k) = \frac{(\alpha_1 v_1)^T (\lambda_1 \alpha_1 v_1)}{(\alpha_1 v_1)^T (\alpha_1 v_1)} = \lambda_1 .$$

**Ergebnis:** Die Vektoriteration (\*) ist ein einfaches Verfahren zur numerischen Annäherung des dominanten Eigenwertes (und damit der Spektralnorm) sowie des dominanten Eigenvektors einer symmetrischen Matrix.

In der Praxis möchte man die durch den Faktor  $\lambda_1^k$  erzeugten sehr großen (falls  $|\lambda_1| > 1$ ) oder sehr kleinen (falls  $|\lambda_1| < 1$ ) numerischen Werte vermeiden. Man normiert  $u_k$  daher nach jedem Iterationsschritt.

### 51.3 Beispiel

Gegeben sei  $A = \begin{pmatrix} 0,9635 & 1,4266 \\ 1,4266 & 0,0365 \end{pmatrix}$  und der (bereits normierte) Anfangsvektor  $u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Wir berechnen mit 4 Nachkommastellen

$i$	$u_i := A\tilde{u}_{i-1}$	$\tilde{u}_i := \frac{u_i}{ u_i }$	$R_A(\tilde{u}_{i-1})$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 1,4266 \\ 0,0365 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,9997 \\ 0,0256 \end{pmatrix}$	0,0365
2	$\begin{pmatrix} 0,9997 \\ 1,4271 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,5737 \\ 0,8190 \end{pmatrix}$	1,0358
3	$\begin{pmatrix} 1,7211 \\ 0,8483 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,8970 \\ 0,4421 \end{pmatrix}$	1,6824
4	$\begin{pmatrix} 1,4950 \\ 1,2958 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,7557 \\ 0,6550 \end{pmatrix}$	1,9137
5	$\begin{pmatrix} 1,6625 \\ 1,1020 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,8335 \\ 0,5525 \end{pmatrix}$	1,9780
6	$\begin{pmatrix} 1,5913 \\ 1,2092 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,7962 \\ 0,6050 \end{pmatrix}$	1,9944
7	$\begin{pmatrix} 1,6302 \\ 1,1579 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,8153 \\ 0,5791 \end{pmatrix}$	1,9985
8	$\begin{pmatrix} 1,6117 \\ 1,1842 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,8059 \\ 0,5921 \end{pmatrix}$	1,9996
9	$\begin{pmatrix} 1,6212 \\ 1,1713 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,8106 \\ 0,5856 \end{pmatrix}$	1,9999
10	$\begin{pmatrix} 1,6164 \\ 1,1778 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,8082 \\ 0,5889 \end{pmatrix}$	2,0000

Tatsächlich ist (auf 4 Nachkommastellen) der dominante Eigenwert von  $A$  gleich 2 und der zugehörige normierte Eigenvektor  $\begin{pmatrix} 0,8090 \\ 0,5878 \end{pmatrix}$ .

Kann man auch die nicht dominanten Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen?

Wir lernen jetzt ein einfaches und robustes Verfahren zur Bestimmung *aller* Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix kennen.

## 51.4 Das Jacobi-Verfahren

**Grundidee:** Wendet man auf eine symmetrische Matrix  $A$  eine orthogonale Matrix  $Q$  an, so erhält man die Matrix  $Q^T A Q$ , die dieselben Eigenwerte wie  $A$  besitzt, vgl. 44.8 (Wechsel zwischen Orthonormalbasen) und 46.4 (Hauptachsentransformation).

Man transformiert nun  $A$  mithilfe einer Folge  $(Q_k)$  orthogonaler Matrizen auf Diagonalgestalt. Damit wird (numerisch angenähert) die Hauptachsennorm  $A = Q \Lambda Q^T$  erzeugt, aus der die Eigenwerte und Eigenvektoren abgelesen werden können.

**Algorithmische Umsetzung:** Als orthogonale Transformationen verwendet man Rotationsmatrizen vom Typ

$$Q(i, j, \varphi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & \\ & & \cos \varphi & & \dots & & \sin \varphi & \\ & & & 1 & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & & & 1 & & \\ & & -\sin \varphi & & \dots & & \cos \varphi & \\ & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & \dots & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(die Rotationsmatrixeinträge stehen in der  $i$ -ten und  $j$ -ten Zeile und Spalte).

Die Anwendung von  $Q(i, j, \varphi)$  verändert nur die  $i$ -te und  $j$ -te Zeile und Spalte von  $A$ .

Man iteriert nun über die Nichtdiagonalelemente  $a_{ij}$ . Wird im Iterationsschritt  $k$  das Element  $a_{ij}$ ,  $i \neq j$ , betrachtet, so wählt man den Rotationswinkel  $\varphi_k$  so,

dass  $Q = Q(i, j, \varphi_k)$  gerade die Einträge  $a_{ij}$  und  $a_{ji}$  zu Null macht: Mit

$$\varphi_k := \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \frac{a_{jj} - a_{ii}}{2a_{ij}}$$

erhält man

$$\begin{pmatrix} a'_{ii} & a'_{ij} \\ a'_{ji} & a'_{jj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_k & -\sin \varphi_k \\ \sin \varphi_k & \cos \varphi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_k & \sin \varphi_k \\ -\sin \varphi_k & \cos \varphi_k \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi_k \cdot a_{ii} - 2 \cos \varphi_k \sin \varphi_k \cdot a_{ij} & \cos \varphi_k \sin \varphi_k (a_{ii} - a_{jj}) \\ \quad + \sin^2 \varphi_k \cdot a_{jj} & \quad + (\cos^2 \varphi_k - \sin^2 \varphi_k) a_{ij} \\ \cos \varphi_k \sin \varphi_k (a_{ii} - a_{jj}) & \sin^2 \varphi_k \cdot a_{ii} + 2 \cos \varphi_k \sin \varphi_k \cdot a_{ij} \\ \quad + (\cos^2 \varphi_k - \sin^2 \varphi_k) a_{ij} & \quad + \cos^2 \varphi_k \cdot a_{jj} \end{pmatrix},$$

wobei wegen

$$\frac{\cos^2 \varphi_k - \sin^2 \varphi_k}{2 \cos \varphi_k \sin \varphi_k} = \frac{\cos(2\varphi_k)}{\sin(2\varphi_k)} = \cot(2\varphi_k) = \frac{a_{jj} - a_{ii}}{2a_{ij}}$$

die Nebendiagonaleinträge  $a'_{ij} = a'_{ji}$  verschwinden.

Bei wiederholtem Durchlauf über alle Nichtdiagonaleinträge entsteht so eine Kette von orthogonalen Transformationen  $Q_1, Q_2, \dots$ , und man kann zeigen, dass

$$Q_k^T \dots Q_2^T Q_1^T A Q_1 Q_2 \dots Q_k \rightarrow \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Zugleich enthält die  $i$ -te Spalte der orthogonalen Matrix  $P_k := Q_1 Q_2 \dots Q_k$  eine Approximation des Eigenvektors zum Eigenwert  $\lambda_i$ . Auch im Falle mehrfacher Eigenwerte entsteht automatisch ein orthonormales Eigenvektorsystem (keine Gram-Schmidt-Orthonormalisierung erforderlich).

Ein ausgearbeiteter Algorithmus zum Jacobi-Verfahren ist zu finden in

H. R. Schwarz: Numerische Mathematik. Teubner, Stuttgart.

**Komplexität:** Im Falle einer  $n \times n$ -Matrix werden pro Zyklus (einmaliges Durchlaufen aller Nichtdiagonaleinträge) etwa  $32n^3$  Multiplikationen benötigt. Typischerweise sind etwa sechs bis acht Zyklen erforderlich.

**Bemerkungen:** Die numerische Berechnung von Eigenwerten (und Eigenvektoren) ist rechenaufwändig.

Sowohl für symmetrische Matrizen als auch im allgemeineren Fall nichtsymmetrischer Matrizen gibt es weitere, kompliziertere Verfahren zur Eigenwertbestimmung.