Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß

Sommersemester 2007
Ausgabe: 15.06.2007
Abgabe: 22.06.2007 **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 9

Aufgabe 1

a) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannten linearen Teilraumes V des $\mathbb{R}^5$.

b) Ist $v_5 = (0,1,0,1,0)^T$ in V?

(6 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei mit Π_{20} der Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 20. Dieser sei mit folgendem Skalarprodukt und zugehöriger Norm versehen:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx \quad \text{und} \quad \|p\| := \sqrt{\langle p, p \rangle}\,.$$

Bestimmen Sie reelle Zahlen a and b so, dass

$$\left(\int_{-1}^{1} \left(a + bx - x^{20} \right)^2 \, dx \right)^{1/2}$$

minimal wird.

(8 Punkte)

Aufgabe 3

Gegeben sei der Polynomraum Π_2 mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_{0}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

und der Unterraum $W = \operatorname{span}\left(1 + x^2\right)$.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $W^\perp$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens aus der Basis

$$p_1(x) = 1\,, \quad p_2(x) = x\,, \quad p_3(x) = x^2$$

von Π_2 eine Orthonormalbasis für Π_2.

(10 Punkte)