

Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk

Dr. Michael Breuß

Sommersemester 2007

Übungsblatt 9 – Musterlösungen

Aufgabe 1

a) Wir konstruieren eine Orthonormalbasis des von den Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 aufgespannten linearen Teilraums V mit Hilfe der Gram-Schmidt-Orthonormalisierung.

$$w'_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \frac{w'_1}{\|w'_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w'_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle \cdot w_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{w'_2}{\|w'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w'_3 = v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle \cdot w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle \cdot w_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
w'_4 &= v_4 - \langle v_4, w_1 \rangle \cdot w_1 - \langle v_4, w_2 \rangle \cdot w_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
w_4 &= \frac{w'_4}{\|w'_4\|} = w'_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die gesuchte Orthonormalbasis ist also $\{w_1, w_2, w_4\}$.
Bemerkungen:

- Wir haben jeden Vektor w'_i direkt zu w_i normalisiert, dies erklärt, warum wir beim Berechnen von $w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, w_j \rangle w_j$ auf die Division durch die $\|w_j\|$ verzichten können (dann ist nämlich $\|w_j\| = 1$).
- Für w_3 erhalten wir $w_3 = 0$, da v_3 eine Linearkombination aus v_1 und v_2 ist. Somit gibt es keinen Vektor, der orthogonal zu v_1 und v_2 ist.

b) $v_5 \notin V$, da

$$\begin{aligned}
w_5 &= v_5 - \langle v_5, w_1 \rangle \cdot w_1 - \langle v_5, w_2 \rangle \cdot w_2 - \langle v_5, w_4 \rangle \cdot w_4 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V^\perp.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Wir sollen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ so bestimmen, dass

$$\left(\int_{-1}^1 (a + bx - x^{20})^2 dx \right)^{1/2}$$

minimiert wird.

Aber was tun wir denn eigentlich damit?

In der Tat suchen wir ein Polynom $p_{a,b}(x) := ax + b \in \Pi_1$, d.h. eine lineare Funktion (aka. Gerade),

die das Polynom $q(x) := x^{20} \in \Pi_{20}$ am besten in Hinblick auf die definierte Norm $\|\cdot\|$ approximiert.

D.h. wir müssen $a, b \in \mathbb{R}$ so bestimmen dass $\|p_{a,b} - q\|$ minimiert wird.

Nach dem *Approximationssatz* wissen wir dass dann im Unterraum Π_1 des betrachteten Polynomraums Π_{20} folgendes gelten muss:

$$(p_{a,b} - q) \perp \Pi_1 = \text{span}(1, x).$$

Es muss also gelten

$$\begin{aligned}
\langle 1, p_{a,b} - q \rangle &= 0 \text{ und } \langle x, p_{a,b} - q \rangle = 0 \\
\Leftrightarrow \langle 1, a + bx - x^{20} \rangle &= 0 \text{ und } \langle x, a + bx - x^{20} \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Nach definition des Skalarproduktes haben wir dann das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\int_{-1}^1 a + bx - x^{20} dx = 0$$
$$\int_{-1}^1 ax + bx^2 - x^{21} dx = 0.$$

Wir berechnen die Integrale und erhalten

$$\left[ax + \frac{b}{2}x^2 - \frac{1}{21}x^{21} \right]_{-1}^1 = 0$$
$$\left[\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{3}x^3 - \frac{1}{22}x^{22} \right]_{-1}^1 = 0.$$

Dies ergibt dann

$$2a - \frac{2}{21} = 0$$
$$\frac{2}{3}b = 0.$$

Wir haben also

$$a = \frac{1}{21}$$
$$b = 0.$$

Aufgabe 3

(a)

Bestimmen Sie eine Basis von W^\perp . Da wir uns in Π_2 befinden gilt:

$$p(t) := a + bt + ct^2 \in W^\perp \Rightarrow 0 = \langle p(t), t^2 + 1 \rangle = \int_0^1 (a + bt + ct^2)(t^2 + 1)dt =$$
$$\frac{4}{3}a + \frac{3}{4}b + \frac{8}{15}c.$$

Diese Gleichung ist für $c = -\frac{5}{2}a - \frac{45}{32}b$ erfüllt. Damit ist

$$p(t) = a + bt + \left(-\frac{5}{2}a - \frac{45}{32}b\right)t^2 = a\left(1 - \frac{5}{2}t^2\right) + b\left(t - \frac{45}{32}t^2\right).$$

Also gilt $W^\perp = \text{span}\left(1 - \frac{5}{2}t^2, t - \frac{45}{32}t^2\right)$.

(b)

Gram-Schmidt-Orthonormalisierung:

$$q_1 := \frac{p_1}{\|p_1\|} = 1.$$

$$\tilde{q}_2 := p_2 - \langle p_2, q_1 \rangle q_1 = t - \int_0^1 t \cdot 1 \, dt \cdot 1 = t - \frac{1}{2}.$$

$$q_2 := \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \frac{t - 1/2}{\left(\int_0^1 (t - 1/2)^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_3 &:= p_3 - \langle p_3, q_1 \rangle q_1 - \langle p_3, q_2 \rangle q_2 = t^2 - \int_0^1 t^2 \cdot 1 \, dt \cdot 1 - \int_0^1 t^2 \sqrt{3}(2t - 1) \, dt \cdot \sqrt{3}(2t - 1) = \\ &\frac{1}{6} - t + t^2. \end{aligned}$$

$$q_3 := \frac{\tilde{q}_3}{\|\tilde{q}_3\|} = \frac{1/6 - t + t^2}{\left(\int_0^1 (1/6 - t + t^2)^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1).$$

Die Polynome $q_1 = 1$, $q_2 = \sqrt{3}(2t - 1)$ und $q_3 = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)$ bilden also eine Orthonormalbasis von Π_2 .