

Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß
Sommersemester 2007

Übungsblatt 7 – Musterlösungen

Aufgabe 1

Wir möchten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

lösen. Somit sind:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot I = -2, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jacobi-Verfahren

Iterationsvorschrift:

$$x^{(k+1)} = D^{-1} \left((L + R)x^{(k)} + b \right) \\ \Rightarrow x^{(k+1)} = -\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

Wir erhalten (entsprechend gerundet):

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0.5	0	0	-2
2	0.5	0.25	-1	-2
3	0.625	-0.25	-0.875	-2.5
4	0.375	-0.125	-1.375	-2.438

Gauss-Seidel

Iterationsvorschrift:

$$(D - L)x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + b.$$

Wir erhalten (entsprechend gerundet):

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0.5	0.25	0.125	-1.938
2	0.625	0.375	-0.781	-2.391
3	0.688	-0.047	-1.219	-2.609
4	0.477	-0.371	-1.490	-2.745

SOR

Iterationsvorschrift:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega \cdot (\tilde{x}^{(k+1)} - x^{(k)}).$$

Wir erhalten (entsprechend gerundet):

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0.7	0.35	0.175	-2.713
2	0.665	0.455	-1.671	-2.516
3	0.753	-0.843	-1.423	-2.839
4	-0.191	-0.604	-1.889	-2.893

Die korrekten Werte der Verfahren lauten:

Jacobi					Gauss-Seidel				
k	x_1	x_2	x_3	x_4	k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{2}$	0	0	-2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{31}{16}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-1	-2	2	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{25}{32}$	$-\frac{153}{64}$
3	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{5}{2}$	3	$\frac{11}{16}$	$-\frac{3}{64}$	$-\frac{39}{32}$	$-\frac{167}{64}$
4	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{11}{8}$	$-\frac{39}{16}$	4	$\frac{61}{128}$	$-\frac{95}{256}$	$-\frac{763}{512}$	$-\frac{2811}{1024}$

SOR

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{40}$	$-\frac{217}{80}$
2	$\frac{133}{200}$	$\frac{91}{200}$	$-\frac{1337}{800}$	$-\frac{161}{64}$
3	$\frac{301}{400}$	$-\frac{6741}{8000}$	$-\frac{5691}{4000}$	$-\frac{4543}{1600}$
4	$\frac{15267}{80000}$	$-\frac{96607}{160000}$	$-\frac{604443}{320000}$	$-\frac{74067}{25600}$

Aufgabe 2

a) Nach 39.9c) ändert sich die Determinante nicht, wenn man das Vielfache einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte hinzuaddiert/subtrahiert. Nach 39.9e) ist die Determinante einer Dreiecksmatrix das Produkt ihrer Diagonalelemente. Wir subtrahieren die dritte von der vierten Spalte, die zweite von der dritten Spalte und die erste von der zweiten Spalte:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & a & a \\ 2 & 3 & b & b \\ 2 & 3 & 4 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & a & 0 \\ 2 & 3 & b & 0 \\ 2 & 3 & 4 & c-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 & 0 \\ 2 & 3 & b-3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & c-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a-2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & b-3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & c-4 \end{vmatrix} \\ = (a-2) \cdot (b-3) \cdot (c-4)$$

b) Wir ziehen zunächst aus jeder Zeile den Hauptnenner heraus:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} \\ \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{vmatrix} = \frac{1}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 20 & 15 & 12 \\ 15 & 12 & 10 \end{vmatrix}$$

Wir vereinfachen den Bruch und subtrahieren die dritte Spalte von der zweiten und das Zweifache der dritten Spalte von der ersten Spalte:

$$= \frac{1}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 3 \\ -5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Nun entwickeln wir nach der ersten Zeile:

$$= \frac{1}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2} \cdot (-1)^3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

Wir berechnen die 2×2 -Determinante

$$= \frac{1}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2} \cdot (-1) \cdot (-4 \cdot 4 - 3 \cdot (-5))$$

und erhalten:

$$= \frac{1}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2} \cdot (-1) \cdot (-1) = \frac{1}{43200}$$

Aufgabe 3

- Wir verwenden wiederum 39.9c). Außerdem ist die Determinante nach 39.2a) linear in jeder Zeile und nach 39.9a) auch in jeder Spalte.
- Wir addieren nun das 10^4 -fache der ersten Spalte, das 10^3 -fache der zweiten Spalte, das 10^2 -fache der dritten Spalte und das 10^1 -fache der vierten Spalte zur letzten Spalte hinzu. Somit ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 & 13273 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 14300 \\ 2 & 6 & 0 & 1 & 26013 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 27300 \\ 2 & 8 & 2 & 7 & 28275 \end{vmatrix} = 13 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 & 1021 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1100 \\ 2 & 6 & 0 & 1 & 2001 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 2100 \\ 2 & 8 & 2 & 7 & 2175 \end{vmatrix}$$