Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß

Sommersemester 2007

Übungsblatt 6 – Musterlösungen

Aufgabe 1

<u>Berechnung der Inversen der Matrix A:</u>

$$\begin{array}{cc} A & E \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Addiere zur 2. Zeile das (-2)-fache der 1. Zeile
und multipliziere danach die zweite Zeile mit (-1)

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Addiere zur 3. Zeile das 4-fache der 2. Zeile

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Addiere zur 2. Zeile das 1-fache der 3. Zeile und
addiere zur 1. Zeile das 1-fache der 3. Zeile $\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Addiere zur 1. Zeile das (-3)-fache der 2. Zeile

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -11 & -5 & -2 \\ -6 & 3 & 1 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ E & A^{-1} \end{array}$$

Berechnung der Inversen der Matrix B:

$$\begin{array}{ccc} B & & E \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Addiere zur 2. Zeile das (-1)-fache der 1. Zeile und
Addiere zur 3. Zeile das (-2)-fache der 1. Zeile $\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Addiere zur 3. Zeile das 3-fache der 2. Zeile

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier bricht der Algorithmus ab, es gibt keine inverse Matrix zu B. Für die Lösung des Gleichungssystems $AX = B$ rechnet man wie folgt:

$$X = A^{-1}B \quad = \quad \begin{pmatrix} -11 & -5 & -2 \\ -6 & 3 & 1 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Zuerst muss ein lineares Gleichungssystem aufgestellt werden. Dieses besteht aus 9 Gleichungen und hat 9 Unbekannte, wobei eine schon aufgelöst ist, nämlich $x_2 = 9$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & & & & & = & 15 \\
 & & & & & & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & & & & & & = & 15 \\
 & & & & & & & & & & & & x_7 & + & x_8 & + & x_9 & = & 15 \\
x_1 & & & & & + & x_4 & & & & & + & x_7 & & & & & = & 15 \\
 & & x_2 & & & & & + & x_5 & & & & & + & x_8 & & & = & 15 \\
 & & & & x_3 & & & & & + & x_6 & & & & & + & x_9 & = & 15 \\
x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & & & & & + & x_9 & = & 15 \\
 & & & & x_3 & & & + & x_5 & & & + & x_7 & & & & & = & 15 \\
 & & x_2 & & & & & & & & & & & & & & & = & 9
\end{array}$$

Die ersten drei Gleichungen sind für die Summeneinträge in einer Zeile, die folgenden drei sind für die Summeneinträge in einer Spalte, die folgenden zwei für die Diagonalsummen und die letzte Gleichung ist die bereits angesprochene Gleichung $x_2 = 9$. Nun überführen wir diese Gleichungen in das bekannte Schema, führen dabei aber einige Zeilenpermutationen durch:

$$\begin{array}{c} I \\ II \\ III \\ IV \\ V \\ VI \\ VII \\ VIII \\ IX \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 15 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 15
\end{array}\right)$$

Wir formen nun diese Matrix nach dem Gauß-Algorithmus um und bringen sie in eine obere Dreiecksform (d.h. Gauß-Jordan-Form). Aus Platzgründen verzichten wir hier auf die komplette Angabe der verschiedenen Matrizen in den einzelnen Zwischenschritten, geben hier allerdings die Schrittreihenfolge der Gleichungen an (von links nach rechts):

$III - I$	$III + II$	$V - II$	$VI + III$
$VI - IV$	$VIII - I$	$VIII + II$	$VIII - III$
$VIII + IV$	$VIII - 2V$	$VIII + VI$	$VIII - VII$
$IX + III$	$IX - IV$	$IX + V$	$IX - VII$

Die Matrix sieht nach diesen Operationen wie folgt aus:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Folgende Werte sind aus diesem Gleichungssystem sofort erkennbar:

$$\begin{aligned}
x_2 &= 9 \\
x_5 &= 5 \\
x_8 &= 1
\end{aligned}$$

Da der Wert für x_9 frei wählbar ist, setzen wir im folgenden $x_9 := \lambda$. Dann gilt, u.a. für x_7:

$$\begin{aligned}
& x_7 + x_8 + x_9 &&= 15 \\
\Leftrightarrow\quad & x_7 + 1 + \lambda &&= 15 \\
\Leftrightarrow\quad & x_7 &&= 14 - \lambda
\end{aligned}$$

Dies geht analog auch für die restlichen Unbekannten. Es ergibt sich also folgender Lösungsvektor:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ -4 \\ -9 \\ 5 \\ 19 \\ 14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun muss man überprüfen, für welches λ dieser Lösungsvektor im Zahlenbereich von $\{1, \ldots, 9\}$ liegt. Dies gilt für zwei Werte: $\lambda = 6$, sowie $\lambda = 8$. Es ergeben sich folgende zwei magische Quadrate:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Man erkennt schnell, dass man die jeweils andere Lösung durch eine Spiegelung an der vertikalen Symmetrieachse erhalten kann. Andere Spiegelungen würden die Position der bereits gegebenen Variable $x_2 = 9$ verändern, sie sind von daher keine zulässige Lösung des Gleichungssystems.

Aufgabe 3

(a)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ -4 & 3 & 6 & -5 & -21 \\ 2 & -2 & -1 & 6 & 10 \\ -6 & 6 & 13 & 10 & -22 \end{array}\right)$$

Tausche 1. und 3. Zeile; sowie 2. und 3. Zeile und dividiere die erste Zeile durch 2

$\Downarrow$

$$= \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ -4 & 3 & 6 & -5 & -21 \\ -6 & 6 & 13 & 10 & -22 \end{array}\right)$$

Addiere zur 2. Zeile das 2-fache der 1. Zeile,
Addiere zur 3. Zeile das 4-fache der 1. Zeile,
Addiere zur 4. Zeile das 6-fache der 1. Zeile

$\Downarrow$

$$= \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 28 & 8 \end{array}\right)$$

Addiere zur 3. Zeile das (-1)-fache der 2. Zeile

$\Downarrow$

$$= \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 28 & 8 \end{array}\right)$$

Addiere zur 4. Zeile das 5-fache der 3. Zeile

$\Downarrow$

$$= \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Dividiere die 4. Zeile durch 3,
Dividiere die 2. Zeile durch (-1),
Addiere zur 3. Zeile das (-5)-fache der 4. Zeile,
Addiere zur 2. Zeile das 2-fache der 4. Zeile,
Addiere zur 1. Zeile das (-3)-fache der 4. Zeile
$\Downarrow$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Dividiere die 3. Zeile durch 2,
Addiere zur 2. Zeile das 1-fache der 3. Zeile,
Addiere zur 1. Zeile das $\frac{1}{4}$-fache der 3. Zeile,
Addiere zur 1. Zeile das 1-fache der 2. Zeile,
$\Downarrow$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Lösung ist also der Vektor $x = (1, 0, -2, 1)^\top$.

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & b \end{array}\right)$$

Addiere zur 3. Zeile das (-2)-fache der 2. Zeile,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & a-4 & b-10 \end{array}\right)$$

Für $a - 4 \neq 0$ gilt nun:
Dividiere 3. Zeile durch $(a - 4)$,
Addiere zur 2. Zeile das (-2)-fache der 3. Zeile,
Addiere zur 1. Zeile das (-3)-fache der 3. Zeile,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{6a-3b+6}{a-4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5a-2b}{a-4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-10}{a-4} \end{array}\right)$$

Addiere zur 1. Zeile das (-2)-fache der 3. Zeile,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-4a+b+6}{a-4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5a-2b}{a-4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-10}{a-4} \end{array}\right)$$

Wir erhalten also folgenden Lösungsvektor, der eindeutig ist für $a \neq 4$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{a-4} \begin{pmatrix} -4a+b+6 \\ 5a-2b \\ b-10 \end{pmatrix}$$

Für $a = 4$ und $b = 10$ gibt es unendlich viele Lösungen mit $\lambda \in \mathrm{R}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $a = 4$ und $b \neq 10$ gibt es keine Lösung.