Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß

Sommersemester 2007
Ausgabe: 18.05.2007
Abgabe: 25.05.2007 **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Sei $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $A_1 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Gegeben seien außerdem die Standardbasis B des $\mathbb{R}^3$ mit den Basisvektoren

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei für diesen Aufgabenteil A_1 speziell gewählt als

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Schließen Sie ohne weitere Berechnungen anhand der Spaltenvektoren von A_1 auf den Effekt, den die Abbildung f auf einen Vektor $(x_1, x_2, x_3)^T$ hat.

(b) Sei nun A_1 für diesen Aufgabenteil speziell gewählt als

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\dim \operatorname{Im}(f_1)$, $\dim \operatorname{Ker}(f_1)$, sowie eine Basis von $\operatorname{Im}(f_1)$.

(c) Es seien zusätzlich zu f_1 weitere lineare Abbildungen f_2, f_3 und f_4 gegeben mit

$$f_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3, \quad f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5,$$

sowie entsprechenden Matrixen A_2, A_3 und A_4. Bestimmen Sie den maximalen Rang der Matrix A_5, die der Abbildung

$$f_5 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5, \qquad v \mapsto f_4(f_3(f_1(f_2(v))))$$

zugeordnet ist. Ist $A_5 \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{R})$?

(8 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und $V = W = \mathbb{K}^n$. Seien $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ fest gewählte Koordinaten. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \end{pmatrix} .$$

Offenbar ist f linear. Zeigen Sie: f ist *genau dann* bijektiv, *wenn* $c_1 \neq 0$ ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 3

(a) Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, und f_j mit einem Index $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei gegeben durch

$$f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x_j .$$

Bestimmen Sie bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}$ die Matrixdarstellung von f_j.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $(x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (x_1, x_2, -x_3)^T$, d.h., f beschreibt die Spiegelung an der von $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_2}$ aufgespannten Ebene.
Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von f, einmal bezüglich der Standardbasis B und einmal bezüglich der Basis $C = \{\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}, \mathbf{e_1} - \mathbf{e_3}, \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}\}$.

(6 Punkte)