Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß

Sommersemester 2007

Übungsblatt 5 – Musterlösungen

Aufgabe 1

(a) Die Abbildung "verschiebt" die Einträge des Vektors $(x_1, x_2, x_3)^T$: Die Spalten von A_1 sind die Bilder der Basisvektoren, daher wird $(1,0,0)^T$ auf $(0,1,0)^T$, $(0,1,0)^T$ auf $(0,0,1)^T$ und $(0,0,1)^T$ auf $(1,0,0)^T$ abgebildet. Nachrechnen ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Matrix A_1 hat Rang 2, da

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ linear unabhängig.}$$

Daher ist dim Im$(f_1) = 2$ und dim Ker$(f_1) = 1$. Eine Basis von Im(f_1) ist zum Beispiel:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) A_5 hat maximal Rang 2, da $f_3 \circ f_1 \circ f_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$. Folglich ist A_5 nicht invertierbar (nach 35.14d) und daher auch nicht Element von GL$(5, \mathbb{R})$.

Aufgabe 2

Zur Erinnerung: Eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ ist genau dann injektiv, wenn $ker f = 0$ gilt. Für $V, W \in \mathbb{K}$.
Wir zeigen zunaechst: $ker f = \{0\}$ gilt genau dann, wenn $c_1 \neq 0$ ist. Sei $f(x) = 0$. Dann sind $x_2, .., x_n = 0$ und $c_1 x_1 = 0$. Ist $c_1 \neq 0$, so ist also $x_1 = 0$. Damit ist gezeigt: ist $c_1 \neq 0$, so ist $ker(f) = \{0\}$, und damit f injektiv.
Sei umgekehrt f injektiv. Dann ist $0 \neq f((1, 0, ..., 0)^t) = (0, 0, ..., 0, c_1)$, also ist $c_1 \neq 0$.
Wir muessen noch zeigen, dass f bijektiv ist, wenn f injektiv ist. Sei $e_j = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^t$. Dann bildet $e_1, ..., e_n$ die kanonische Basis in V. Wegen der Injektivitaet sind die Bilder $f(e_j)$ linear unabhaengig, also hat das Bild die gleiche Dimension wie der Vektorraum V, und die Raeume sind gleich $\Rightarrow$ bijektiv.

$\square$

Aufgabe 3

(a)

Sei $B = \{e_1, ..., e_n\}$ die kanonische Basis in $\mathbb{R}^n$ und $C = \{1\}$ diejenige in $\mathbb{R}$. Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Dann ist

$$f(e_j) = (x|e_j) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j (j.Koord.) \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad | \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 (j.Koord.) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) = x_j.$$

Daraus folgt $A_\alpha^{B,C} = (x_1, ..., x_n)$ (der transponierte Vektor x^t).

(b)

Es ist $f(e_1) = e_1, f(e_2) = e_2$ und $f(e_3) = -e_3$. Also erhaelt man $A_f^{B,B} = A_f^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Wir benennen die Vektoren aus C $b_1 = e_1 + e_3$, $b_2 = e_1 - e_3$, $b_3 = e_2 - e_3$. Dann erhaelt man:
$f(b_1) = b_2$, $f(b_2) = e_1 + e_3 = b_1$, $f(b_3) = e_2 + e_3 = (e_1 + e_3) - (e_1 - e_3) + (e_2 - e_3) = b_1 - b_2 + b_3$.

Damit ergibt sich $A_f^C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\square$