

Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß
Sommersemester 2007
Ausgabe: 11.05.2007
Abgabe: 18.05.2007 vor der Vorlesung

Übungsblatt 4

Zur Bearbeitung der Aufgaben 1 und 2 benötigen Sie folgende **Definition**.

Es sei V ein gegebener Vektorraum. U_1 und U_2 seien Unterräume von V . Die Unterräume U_1 und U_2 heißen komplementär, wenn

1. der Durchschnitt von U_1 und U_2 so klein wie möglich ist: $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, und
2. das Erzeugnis von U_1 und U_2 so groß wie möglich ist: $U_1 + U_2 = V$; d.h., die kombinierten Erzeugendensysteme von U_1 und U_2 spannen zusammen den Vektorraum V auf.

Aufgabe 1

- (a) Beweisen Sie die folgende Aussage: *Jeder Unterraum von V hat einen komplementären Unterraum.*
- (b) Hat ein Unterraum U_1 eines Vektorraums nur genau ein Komplement U_2 ? Beantworten Sie diese Frage anhand des Vektorraums \mathbb{R}^2 und seiner Unterräume.

(10 Punkte)

Aufgabe 2

Seien U_1 und U_2 komplementäre Unterräume des Vektorraums V . Beweisen Sie:

Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich eindeutig als Summe eines Vektors $u_1 \in U_1$ und eines Vektors $u_2 \in U_2$ schreiben.

Hinweis. Zu zeigen ist hier Existenz und Eindeutigkeit der Zerlegung $v = u_1 + u_2$.

(8 Punkte)

Aufgabe 3

- (a) Der Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ habe bezüglich der Standardbasis die Koordinaten $x = (3, 5, 8)$. Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $\eta \in \mathbb{R}^3$ von v bezüglich der Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Der Vektor $w \in \mathbb{C}^3$ habe bezüglich der Standardbasis die Koordinaten $z = (2, 1 + 2i, 2 - i)$. Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $\varphi \in \mathbb{C}^3$ von w bezüglich der Basis

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(6 Punkte)