Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß

Sommersemester 2007

Übungsblatt 4 – Musterlösungen

Aufgabe 1

(a)

Zu beweisen: *Jeder Unterraum von V hat einen komplementären Unterraum.*

Notation: Wir nehmen an, dass $v_i \in V$ für alle i gilt.

Zum Beweis:
Wir betrachten einen Vektorraum V mit Basis

$$B := \{v_1, \ldots, v_l\},$$

und einen beliebigen Unterraum U_1 von V, dessen Basis – die nach Satz 33.17 existieren muss – gegeben ist als

$$B_1 := \{v_1, \ldots, v_m\},$$

für $m < l$.

Sei nun ausserdem U_2 ein weiterer Untervektorraum von V mit Basis

$$B_2 := \{v_{m+1}, \ldots, v_{m+n} := v_l\}.$$

Behauptung: U_2 ist komplementär zu U_1, was das zu beweisende zeigen würde, da U_1 beliebig gewählt werden kann.

Hierzu zeigen wir die 2 Bedingungen:

1. $\mathbf{U_1 \cap U_2 = \{\tilde{0}\}}$:

   Sei $v \in U_1 \cap U_2$, beliebig.
   Da dann $v \in U_1$ und $v \in U_2$ gelten muss, können wir nach Satz 33.8 den Vektor v einmal als Linearkombination der Basisvektoren aus U_1 und einmal als Linearkombination der Basisvektoren aus U_2 darstellen :

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \ \in U_1 && (1) \\ v &= \lambda_{m+1} v_{m+1} + \lambda_{m+2} v_{m+2} + \cdots + \lambda_l v_l \ \in U_2, && (2) \end{aligned}$$

mit Skalaren $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{R}$.

Wenn wir nun die Subtraktion $(1) - (2)$ berechnen erhalten wir

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m - (\lambda_{m+1} v_{m+1} + \lambda_{m+2} v_{m+2} + \cdots + \lambda_l v_l). \quad (3)$$

Da wir nun ja mit (1) und (2) jedesmal den selben Vektor v dargestellt hatten erhalten wir konsequenterweise auch

$$(1) - (2) = v - v = \vec{0}. \quad (4)$$

Wenn wir nun $(3) = (4)$ setzen erhalten wir

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m - (\lambda_{m+1} v_{m+1} + \lambda_{m+2} v_{m+2} + \cdots + \lambda_l v_l) = \vec{0}, \quad (5)$$

was nur gelten kann wenn für alle $j = 1, \dots, l$ gilt:

$$\lambda_j = 0,$$

da ja B_1 und B_2 Basen sind.
Wenn aber für alle Skalare $\lambda_j = 0$ gilt haben wir schliesslich

$$\begin{aligned} v &= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_m \\ &= 0 \cdot v_{m+1} + 0 \cdot v_{m+2} + \cdots + 0 \cdot v_l \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

gezeigt.

Wenn wir uns nun erinnern dass wir ein beliebiges $v \in U_1 \cap U_2$ gewählt hatten, ergibt sich schlussendlich dass das einzige Element in $U_1 \cap U_2$ der Nullvektor $\vec{0}$ ist, und somit

$$U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$$

gilt.

2. $\underline{\mathbf{U_1 + U_2 = V}}$:

   Nach unsere Wahl der Basen von U_1 und U_2, nämlich B_1 und B_2, haben wir dass in $U_1 + U_2$ bestimmt u.a. die erzeugenden Vektoren $v_1, \dots, v_m$ und $v_{m+1}, \dots, v_l$ des Vektorraums V mit Basis B liegen.
   Somit gilt dass B in $U_1 + U_2$ enthalten ist und damit haben wir

   $$U_1 + U_2 = \text{span}(B) = V.$$

□

(b)

Auf den ersten Blick könnte man meinen dass jeder Untervektorraum U_1 von V nur *genau einen* komplementären Untervektorraum –nennen wir ihn U_2– hat, was aber **FALSCH** ist!

Betrachtet man, wie vorgeschlagen, den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit seinem Untervektorraum

$$U_1 := \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\},$$

was der y-Achse entspricht.
Ein Komplement zu U_1 wäre zum Beispiel durch die x-Achse, d.h.

$$U_2 := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

gegeben.

Allerdings gibt es noch viele andere komplementäre Unterräume zu U_1, z.B. die erste Winkelhalbierende

$$U_2' := \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Bemerkung:
Tatsächlich gilt hier sogar dass *jeder* 1-dimensionale[1] Unterraum $U_2 \neq U_1$ ein Komplement zu U_1 bildet!
Man beachte, dass ein solcher 1-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^2$ anschaulich einfach eine Ursprungsgerade im $\mathbb{R}^2$ darstellt.

Aufgabe 2

Zu zeigen ist: *Seien U_1, U_2 komplementäre Unterräume. Dann lässt sich jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als Summe eines Vektors $u_1 \in U_1$ und eines Vektors $u_2 \in U_2$ schreiben:*

$$v \quad = \quad u_1 + u_2 \qquad \textit{für eindeutige } u_1 \in U_1;\ u_2 \in U_2.$$

Die Existenz von u_1 und u_2 ergibt sich direkt aus der Definition des Erzeugnisses (Siehe Definition 33.8 und Satz 33.9): Da U_1 und U_2 den Vektorraum V erzeugen, kann jeder Vektor V als Linearkombination von Vektoren aus U_1 und U_2, also die Summe eines Vektors aus U_1 und eines Vektors aus U_2 dargestellt werden.

Der Nachweis der Eindeutigkeit geht mit einem kleinen Trick. Sei $v = u_1 + u_2$ und $v = w_1 + w_2$ mit $u_1, w_1 \in U_1$ und $u_2, w_2 \in U_2$. Dann ist

$$u_1 + u_2 \quad = v \quad = w_1 + w_2$$

[1] Einen 1-dimensionalen Unterraum U_2 kann man immer für ein festes $\eta \in \mathbb{R}$ in der Form $U_2 = \{(x, \eta) \mid x \in \mathbb{R}\}$ oder $U_2 = \{(\eta, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ schreiben.

also

$$u_1 - w_1 \quad = \quad w_2 - u_2$$

In dieser Gleichung ist die linke Seite die Differenz zweier Vektoren aus U_1, also liegt sie in U_1; die rechte Seite ist die Differenz zweier Vektoren aus U_2, also liegt sie in U_2. Die Gleichung stellt also einen Vektor dar, der sowohl in U_1 als auch in U_2 liegt; dieser muss der Nullvektor sein, da $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$ ist. Somit folgt $u_1 = w_1$ und $u_2 = w_2$. Das bedeutet, dass u_1 und u_2 eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 3

(a)

Gesucht ist der Vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ mit $\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3 = x$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \xi = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(b)

Gesucht ist der Vektor $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T$ mit $\zeta_1 v_1 + \zeta_2 v_2 + \zeta_3 v_3 = z$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & i & 1+2i \\ i & 0 & 1 & 2-i \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & i & 1+2i \\ 0 & 0 & -i & -2i \end{array}\right) \Rightarrow \zeta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\square$