

Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß
Sommersemester 2007

Übungsblatt 3 – Musterlösungen

Aufgabe 1

a)

Wir betrachten das Polynom $3x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ über $GF(7)[x]$:

- Da 7 prim, gilt: $GF(7) = \mathbb{Z}_7$, $3x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = [3]x^3 + [2]x^2 + [3]x + [4]$.
- Durch Ausprobieren finden wir die Nullstelle $[-1] = [6]$, die wir mit Hilfe der Polynomdivision abspalten:

$$\begin{array}{r} (3x^3 + 2x^2 + 3x + 4) \div (x + 1) = 3x^2 - x + 4 \\ \underline{- 3x^3 - 3x^2} \\ -x^2 + 3x \\ \underline{x^2 + x} \\ 4x + 4 \\ \underline{- 4x - 4} \\ 0 \end{array}$$

Wir erhalten $3x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = (x + 1) \cdot (3x^2 - x + 4)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [3]x^3 + [2]x^2 + [3]x + [4] &= (x + [1]) \cdot ([3]x^2 + [6]x + [4]) \\ &= [3] \cdot (x + [1]) \cdot (x^2 + [2]x + [6]) \end{aligned}$$

- Wir sehen, dass $[2]$ und $[3]$ Nullstellen von $x^2 + [2]x + [6]$ sind. Wir spalten die Nullstelle $[2]$ ab (das heißt, wir dividieren durch $(x - [2]) = (x + [5])$) und erhalten:

$$x^2 + [2]x + [6] = (x + [5]) \cdot (x + [4]).$$

$(x + [4]) = (x - [3])$, dies bestätigt die Nullstelle $[3]$.

- Somit erhalten wir als Zerlegung:

$$[3]x^3 + [2]x^2 + [3]x + [4] = [3] \cdot (x + [1]) \cdot (x + [5]) \cdot (x + [4]).$$

b)

Wir betrachten das Polynom $9x^3 - 27x^2 + 28x - 10$ über $\mathbb{C}[x]$:

- Durch Ausprobieren finden wir heraus, dass 1 eine Nullstelle des Polynoms ist (Polynome ungeraden Grades haben mindestens eine reelle Nullstelle; in diesem Fall sind alle Faktoren ganzzahlig, so kommen lediglich alle ganzzahligen Teiler (auch die negativen) von (-10) in Frage).

- Abspalten der Nullstelle 1 durch Polynomdivision:

$$\begin{array}{r}
 (9x^3 - 27x^2 + 28x - 10) \div (x - 1) = 9x^2 - 18x + 10 \\
 \underline{-9x^3 + 9x^2} \\
 -18x^2 + 28x \\
 \underline{18x^2 - 18x} \\
 10x - 10 \\
 \underline{-10x + 10} \\
 0
 \end{array}$$

- Berechnen der Nullstellen von $9x^2 - 18x + 10$ (zum Beispiel mit Hilfe der pq -Formel *):

$$9x^2 - 18x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x + \frac{10}{9}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} - \frac{10}{9}}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{10}{9}}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{-\frac{1}{9}}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = 1 \pm \frac{1}{3}i$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 18x + 10 = 9 \cdot \left(x - 1 + \frac{1}{3}i\right) \cdot \left(x - 1 - \frac{1}{3}i\right)$$

- Damit ergibt sich folgende Zerlegung:

$$9x^3 - 27x^2 + 28x - 10 = 9 \cdot (x - 1) \cdot \left(x - 1 + \frac{1}{3}i\right) \cdot \left(x - 1 - \frac{1}{3}i\right)$$

Aufgabe 2

Um zu zeigen, dass die Menge B aller Abbildungen $f : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ mit den Verknüpfungen $+$, \cdot eine boolsche Algebra ist, zeigen wir die 5 benötigten Eigenschaften:

1. Kommutativgesetze:

Zunächst machen wir uns klar, dass Maximum- und Minimum-Operationen auf $f(x, y)$ und $g(x, y)$ mit $f, g : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ kommutativ sind:

$$\begin{aligned}
 \max\{0, 1\} &= \max\{1, 0\} = 1 \\
 \min\{0, 1\} &= \min\{1, 0\} = 0.
 \end{aligned}$$

Die Fälle wenn $f(x, y) = g(x, y)$ ist haben wir weggelassen, da dann die Kommutativität sowieso klar sein sollte. Es gilt also

$$\begin{aligned}\max\{f, g\} &= \max\{g, f\} \\ \min\{f, g\} &= \min\{g, f\}.\end{aligned}$$

Hiemit zeigen wir nun die Kommutativgesetze für Addition und Multiplikation:

- Für *Addition*:

$$\begin{aligned}(f + g)(x, y) &= \max\{f(x, y), g(x, y)\} \\ &= \max\{g(x, y), f(x, y)\} \\ &= (g + f)(x, y)\end{aligned}$$

- Für *Multiplikation*:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x, y) &= \min\{f(x, y), g(x, y)\} \\ &= \min\{g(x, y), f(x, y)\} \\ &= (g \cdot f)(x, y)\end{aligned}$$

2. Assoziativgesetze:

Die Grundidee hier ist, dass klar sein sollte, dass Minimum- und Maximum-Operationen assoziativ sind, d.h.

$$\max\{\max\{a, b\}, c\} = \max\{a, b, c\}.$$

Hiemit zeigen wir nun die Assoziativgesetze für Addition und Multiplikation:

- Für *Addition*:

$$\begin{aligned}(f + g) + h &= (f + g)(x, y) + h(x, y) \\ &= \max\{f(x, y), g(x, y)\} + h(x, y) \\ &= \max\{\max\{f(x, y), g(x, y)\}, h(x, y)\} \\ &= \max\{f(x, y), g(x, y), h(x, y)\} \\ &\stackrel{(Komm)}{=} \max\{\max\{g(x, y), h(x, y)\}, f(x, y)\} \\ &= \max\{g(x, y), h(x, y)\} + f(x, y) \\ &\stackrel{(Komm)}{=} f(x, y) + \max\{g(x, y), h(x, y)\} \\ &= f(x, y) + (g + h)(x, y) \\ &= f + (g + h).\end{aligned}$$

- Für *Multiplikation*:

$$\begin{aligned}(f \cdot g) \cdot h &= (f \cdot g)(x, y) \cdot h(x, y) \\ &= \min\{f(x, y), g(x, y)\} \cdot h(x, y) \\ &= \min\{\min\{f(x, y), g(x, y)\}, h(x, y)\} \\ &= \min\{f(x, y), g(x, y), h(x, y)\} \\ &\stackrel{(Komm)}{=} \min\{\min\{g(x, y), h(x, y)\}, f(x, y)\} \\ &= \min\{g(x, y), h(x, y)\} \cdot f(x, y) \\ &\stackrel{(Komm)}{=} f(x, y) \cdot \min\{g(x, y), h(x, y)\} \\ &= f(x, y) \cdot (g \cdot h)(x, y) \\ &= f \cdot (g \cdot h).\end{aligned}$$

3. Distributivgesetze:

Zunächst sollten wir uns folgendes Gesetz klar machen:

$$\min\{f, \max\{g, h\}\} = \max\{\min\{f, g\}, \min\{f, h\}\} \quad (*),$$

was an Tabelle 1 klar wird, in der wir alle 6 möglichen Anordnungen der drei Elemente f, g, h betrachten.

	$\min\{f, \max\{g, h\}\}$	$\max\{\min\{f, g\}, \min\{f, h\}\}$
$f < g < h$	f	f
$f < h < g$	f	f
$g < f < h$	f	f
$h < f < g$	f	f
$g < h < f$	h	h
$h < g < f$	g	g

Table 1: Beweis für (*)

Dies wird für den ersten Teil unseres Beweises benötigt. Für den zweiten Teil kann man entsprechend dann auf gleiche Weise für

$$\max\{f, \min\{g, h\}\} = \min\{\max\{f, g\}, \max\{f, h\}\}$$

zeigen.

- $\mathbf{f \cdot (g + h) = (f \cdot g) + (f \cdot h)}$

$$\begin{aligned} f \cdot (g + h) &= f(x, y) \cdot (g(x, y) + h(x, y)) \\ &= f(x, y) \cdot \max\{g(x, y), h(x, y)\} \\ &= \min\{f(x, y), \max\{g(x, y), h(x, y)\}\} \\ &\stackrel{(*)}{=} \max\{\min\{f(x, y), g(x, y)\}, \min\{f(x, y), h(x, y)\}\} \\ &= \max\{(f \cdot g)(x, y), (f \cdot h)(x, y)\} \\ &= (f \cdot g)(x, y) + (f \cdot h)(x, y) \\ &= (f \cdot g) + (f \cdot h). \end{aligned}$$

- $\mathbf{f + (g \cdot h) = (f + g) \cdot (f + h)}$

$$\begin{aligned} f + (g \cdot h) &= f(x, y) + (g(x, y) \cdot h(x, y)) \\ &= f(x, y) + \min\{g(x, y), h(x, y)\} \\ &= \max\{f(x, y), \min\{g(x, y), h(x, y)\}\} \\ &\stackrel{(*)}{=} \min\{\max\{f(x, y), g(x, y)\}, \max\{f(x, y), h(x, y)\}\} \\ &= \min\{(f + g)(x, y), (f + h)(x, y)\} \\ &= (f + g)(x, y) \cdot (f + h)(x, y) \\ &= (f + g) \cdot (f + h). \end{aligned}$$

4. Neutrale Elemente:

Hier zeigen wir, dass die angegebenen neutralen Elemente $n(x, y)$ und $e(x, y)$ die geforderten Eigenschaften besitzen.

- Für *Addition*:

Wir suchen ein Element $0 \in B$ so dass $0 + f = f$ für alle $f \in B$ gilt:

$$\begin{aligned} 0(x, y) + f(x, y) &= \max\{0(x, y), f(x, y)\} \\ &\stackrel{!}{=} f(x, y). \end{aligned}$$

Dies ist aber genau dann der Fall wenn für alle $(x, y) \in \{0, 1\}^2$ gilt :

$$0(x, y) = n(x, y) = 0.$$

Dies ist somit genau das angegebene Element $n(x, y)$.

- Für *Multiplikation*:

Wir suchen ein Element $1 \in B$ so dass $1 \cdot f = f$ für alle $f \in B$ gilt:

$$\begin{aligned} 1(x, y) \cdot f(x, y) &= \min\{1(x, y), f(x, y)\} \\ &\stackrel{!}{=} f(x, y). \end{aligned}$$

Dies ist aber genau dann der Fall wenn für alle $(x, y) \in \{0, 1\}^2$ gilt :

$$1(x, y) = e(x, y) = 1.$$

Dies ist somit genau das angegebene Element $e(x, y)$.

5. Komplementäre Elemente:

Hier zeigen wir, dass das angegebene komplementäre Element $\neg f(x, y)$ die geforderten Eigenschaften besitzt.

- Für *Addition*:

Wir suchen ein Element $\neg f \in B$ so dass $f + (\neg f) = 1 = e(x, y)$ für alle $f \in B$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x, y) + (\neg f(x, y)) &= \max\{f(x, y), \neg f(x, y)\} \\ &= \begin{cases} \max\{f(x, y), 1\}, & \text{falls } f(x, y) = 0 = n(x, y) \\ \max\{f(x, y), 0\}, & \text{falls } f(x, y) = 1 = e(x, y) \end{cases} \\ &= 1 = e(x, y). \end{aligned}$$

- Für *Multiplikation*:

Wir suchen ein Element $\neg f \in B$ so dass $f \cdot (\neg f) = 0 = n(x, y)$ für alle $f \in B$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x, y) \cdot (\neg f(x, y)) &= \min\{f(x, y), \neg f(x, y)\} \\ &= \begin{cases} \min\{f(x, y), 1\}, & \text{falls } f(x, y) = 0 = n(x, y) \\ \min\{f(x, y), 0\}, & \text{falls } f(x, y) = 1 = e(x, y) \end{cases} \\ &= 0 = n(x, y). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3

$$\mathbf{1} \quad W_1 = \{p \in \prod_n \mid p(x) = p(-x) \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Ist W_1 UVR? Für $p, q \in W_1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $0 \in W_1$, denn $0(x) = 0(-x)$

(2) $p + q \in W_1$, denn $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = p(-x) + q(-x) = (p + q)(-x)$

(3) $\lambda * p \in W_1$, denn $(\lambda * p)(x) = \lambda * p(x) = \lambda * p(-x) = (\lambda * p)(-x)$

$\Rightarrow W_1$ ist UVR.

2 $W_2 = \{p \in \prod_n \mid p(x) = |p(x)| \forall x \in \mathbb{R}\}$

W_2 ist kein UVR, denn mit $p \neq 0$ ist $-p \notin \prod_n$.

3 $W_3 = \{p \in \prod_n \mid p(x) = -p(-x) \forall x \in \mathbb{R}\}$

W_3 ist UVR, denn:

(1) $0 \in W_3$, denn $0(x) = -0(-x)$

(2) $p + q \in W_3$, denn $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = -p(-x) - q(-x) = -(p + q)(-x)$

(3) $\lambda * p \in W_3$, denn $(\lambda * p)(x) = \lambda * p(x) = \lambda * (-p)(-x) = -(\lambda * p)(-x)$