Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß

Sommersemester 2007
Ausgabe: 27.04.2007
Abgabe: 04.05.2007 **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Auf der Menge $\mathbb{H} := \mathbb{R}^4 = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ seien die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert durch

$$\begin{aligned}
(a_1,b_1,c_1,d_1) + (a_2,b_2,c_2,d_2) \quad &:= \quad (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2, d_1+d_2)\,,\\
(a_1,b_1,c_1,d_1) \cdot (a_2,b_2,c_2,d_2) \quad &:= \quad (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2,\\
&\qquad a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2,\\
&\qquad a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2,\\
&\qquad a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)\,.
\end{aligned}$$

Praktischerweise schreibt man $a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c + \mathrm{k}d$ anstelle von (a,b,c,d) mit den imaginären Einheiten i, j und k. Dies ermöglicht den Gebrauch der Rechenregeln für reelle Zahlen, wenn man spezielle Multiplikationsregeln für i, j und k beachtet.

(a) Stellen Sie eine Verknüpfungstafel für die Multiplikation der Elemente i, j und k auf.

Ist $q = a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c + \mathrm{k}d$ eine Quaternion, dann nennt man

i) $\bar{q} = \overline{a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c + \mathrm{k}d} := a - \mathrm{i}b - \mathrm{j}c - \mathrm{k}d$ die zu q konjugierte Quaternion, und

ii) $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ den Betrag von q.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ ein Schiefkörper, aber kein Körper ist.

Bemerkung. Die oben definierte Multiplikation wurde 1843 von Sir William Rowan Hamilton entdeckt. Heute finden Quaternionen in der Robotik und in der Computergrafik Anwendung.

(10 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben seien die Polynome $a(x)$, $b(x)$ aus $\mathbb{R}[x]$ mit

$$\begin{aligned}
a(x) \quad &:= \quad 28x^5 - 66x^4 + 60x^3 - 32x^2 + 29x + 5\,,\\
b(x) \quad &:= \quad 14x^3 - 33x^2 + 23x + 4\,.
\end{aligned}$$

Berechnen Sie den $\operatorname{ggT}(a(x), b(x))$ der beiden Polynome.

(8 Punkte)

Aufgabe 3

Untersuchen Sie, ob $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ zusammen mit der additiven bzw. multiplikativen Verknüpfung

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

ein Körper ist. Machen Sie an entsprechender Stelle deutlich, welche strukturellen Eigenschaften (z.B. die Eigenschaften eines Monoids) Sie im Laufe Ihrer Untersuchung nachgewiesen haben.

(6 Punkte)