

# Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk  
Dr. Michael Breuß  
Sommersemester 2007

## Übungsblatt 2 – Musterlösungen

### Aufgabe 1

Es ist z.T. möglich, die angegebenen Rechnungen mit dem Hinweis auf die Eigenschaften komplexer Operationen zu vereinfachen. Dieses gilt z.B. bezüglich der Assoziativität. Wir geben hier die ausführliche Lösung an.

1. In Teil (a) soll eine Verknüpfungstabelle der Elemente  $i, j$  und  $k$  erstellt werden. Doch was sind diese Elemente überhaupt. In den beiden Schreibweisen, die in der Aufgabenstellung angegeben sind, lesen sich diese Elemente wie folgt:

$$\begin{aligned}i &= 0 + i \cdot 1 + j \cdot 0 + k \cdot 0 = (0, 1, 0, 0) \\j &= 0 + i \cdot 0 + j \cdot 1 + k \cdot 0 = (0, 0, 1, 0) \\k &= 0 + i \cdot 0 + j \cdot 0 + k \cdot 1 = (0, 0, 0, 1)\end{aligned}$$

Von dem Körper der komplexen Zahlen wissen wir, dass  $i \cdot i = -1$ . Gilt ähnliches auch für die Elemente  $i, j, k$ ? Ausgerechnet für  $i \cdot i$ :

$$\begin{aligned}(0, 1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) &= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0, \\&0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0, \\&0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1, \\&0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\&= (-1, 0, 0, 0) = -1,\end{aligned}$$

in respektive beiden Schreibweisen. Analog dazu kann man zeigen

$$\begin{aligned}j \cdot j &= (0, 0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = (-1, 0, 0, 0) = -1 \\k \cdot k &= (0, 0, 0, 1) \cdot (0, 0, 0, 1) = (-1, 0, 0, 0) = -1.\end{aligned}$$

Nun müssen wir einen Blick werfen auf die Multiplikationen der imaginären Elemente untereinander. Fangen wir an mit der Multiplikation  $i \cdot j$ :

$$\begin{aligned}i \cdot j &= (0, 1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = (0 - 0 - 0 - 0, 0 + 0 + 0 - 0, 0 - 0 + 0 + 0, 0 + 1 - 0 + 0) \\&= (0, 0, 0, 1) = k\end{aligned}$$

Wir erhalten bei Multiplikation von 2 verschiedenen imaginären Elementen das fehlende Dritte. Doch was passiert, wenn wir die Multiplikation auf ihre Kommutativität untersuchen, d.h.  $j \cdot i$ ?

$$\begin{aligned}j \cdot i &= (0, 0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) = (0 - 0 - 0 - 0, 0 + 0 + 0 - 0, 0 - 0 + 0 + 0, 0 + 0 - 1 + 0) \\&= (0, 0, 0, -1) = -k\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass die Multiplikation nicht-kommutativ ist, ein erster Hinweis auf die nicht-kommutativität der Multiplikation und auf die Fragestellung in Aufgabenteil (b). Weiterhin gilt für die restlichen Multiplikationen:

$$\begin{aligned}i \cdot k &= (0, 1, 0, 0) \cdot (0, 0, 0, 1) = (0, 0, -1, 0) = -j \\j \cdot k &= (0, 0, 1, 0) \cdot (0, 0, 0, 1) = (0, 1, 0, 0) = i \\k \cdot i &= (0, 0, 0, 1) \cdot (0, 1, 0, 0) = (0, 0, 1, 0) = j \\k \cdot j &= (0, 0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1, 0) = (0, -1, 0, 0) = -i.\end{aligned}$$

Unsere Multiplikationstabelle sieht also wie folgt aus:

$\cdot$	$i$	$j$	$k$
$i$	$-1$	$k$	$-j$
$j$	$-k$	$-1$	$i$
$k$	$j$	$-i$	$-1$

2. In Aufgabenteil (b) sollen wir nun zeigen, dass  $(\mathbb{H}, +, \cdot)$  ein Schiefkörper ist. Zuerst müssen wir Gruppeneigenschaften von  $(\mathbb{H}, +)$  und  $(\mathbb{H}, \cdot)$  untersuchen.

• Gruppeneigenschaften von  $(\mathbb{H}, +)$ :

- Abgeschlossenheit: Seien  $x = (a_1, b_1, c_1, d_1)$  und  $y = (a_2, b_2, c_2, d_2)$  verschiedene Elemente aus  $\mathbb{H}$ :

$$\begin{aligned} x + y &= (a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) \\ &= a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1 + a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2 \\ &= \underbrace{(a_1 + a_2)}_{=:a_3} + i \underbrace{(b_1 + b_2)}_{=:b_3} + j \underbrace{(c_1 + c_2)}_{=:c_3} + k \underbrace{(d_1 + d_2)}_{=:d_3} \\ &= a_3 + ib_3 + jc_3 + kd_3 = (a_3, b_3, c_3, d_3) \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

- Assoziativität: Seien  $x = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ ,  $y = (a_2, b_2, c_2, d_2)$  und  $z = (a_3, b_3, c_3, d_3)$  verschiedene Elemente aus  $\mathbb{H}$  (unter Verwendung der Rechenregeln in  $\mathbb{R}$ ):

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1) \\ &\quad + ((a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2) + (a_3 + ib_3 + jc_3 + kd_3)) \\ &= (a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1) \\ &\quad + ((a_2 + a_3) + i(b_2 + b_3) + j(c_2 + c_3) + k(d_2 + d_3)) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3) + i(b_1 + b_2 + b_3) + j(c_1 + c_2 + c_3) + k(d_1 + d_2 + d_3) \\ &= ((a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) + j(c_1 + c_2) + k(d_1 + d_2)) \\ &\quad + (a_3 + ib_3 + jc_3 + kd_3) \\ &= ((a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1) + (a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2)) \\ &\quad + (a_3 + ib_3 + jc_3 + kd_3) \\ &= (x + y) + z \end{aligned}$$

- Neutrales Element bzgl. +: Es soll gelten:  $\forall x \in \mathbb{H} \exists e \in \mathbb{H} : x + e = x$ . Für ein entsprechend gewähltes  $x = (a, b, c, d)$  gilt dann:

$$\begin{aligned} x + e &= (a + ib + jc + kd) + (a_e + ib_e + jc_e + kd_e) \\ &= (a + a_e) + i(b + b_e) + j(c + c_e) + k(d + d_e) \\ &= (a + a_e, b + b_e, c + c_e, d + d_e) \stackrel{!}{=} (a, b, c, d) \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man ein triviales lineares Gleichungssystem, dass für  $a_e = b_e = c_e = d_e = 0$  erfüllt ist. Damit gilt also, dass das neutrale Element, bzgl. der Addition  $e = (0, 0, 0, 0) = 0$  ist.

- Inverses Element bzgl. +: Wir suchen nun ein inverses Element  $x^{-1}$  mit der Eigenschaft  $x + x^{-1} = e$ . Analog zu oben gilt dann:

$$\begin{aligned} x + x^{-1} &= (a + ib + jc + kd) + (a_i + ib_i + jc_i + kd_i) \\ &= (a + a_i, b + b_i, c + c_i, d + d_i) \stackrel{!}{=} (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Wieder erhalten wir hier ein lineares Gleichungssystem, dass gelöst wird, wenn wir als inverses Element  $x^{-1} = (-a, -b, -c, -d)$  wählen.

- Kommutativität bzgl. +: Mit Hilfe der Rechenregeln in  $\mathbb{R}$  gilt für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= (a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1) + (a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2) \\
 &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) + j(c_1 + c_2) + k(d_1 + d_2) \\
 &= (a_2 + a_1) + i(b_2 + b_1) + j(c_2 + c_1) + k(d_2 + d_1) \\
 &= (a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2) + (a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1) \\
 &= x_2 + x_1
 \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass  $(\mathbb{H}, +)$  eine kommutative Gruppe ist.

- Gruppeneigenschaften von  $(\mathbb{H}, \cdot)$ :

- Abgeschlossenheit unter  $\cdot$ : Wieder wählen wir verschiedene Elemente  $x, y \in \mathbb{H}$  und überprüfen ob das Ergebnis der Multiplikation wieder in  $\mathbb{H}$  zu finden ist.

$$\begin{aligned}
 x \cdot y &= (a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) \\
 &= (a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1) \cdot (a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2) \\
 &= a_1a_2 + ia_2b_2 + ja_1c_2 + ka_1d_2 \\
 &\quad + ib_1a_2 + iib_1b_2 + ijb_1c_2 + ikb_1d_2 \\
 &\quad + jc_1a_2 + jic_1b_2 + jjc_1c_2 + jkc_1d_2 \\
 &\quad + kd_1a_2 + kid_1b_2 + kjd_1c_2 + kkd_1d_2 \\
 &= a_1a_2 + ia_2b_2 + ja_1c_2 + ka_1d_2 \\
 &\quad + ib_1a_2 - b_1b_2 + kb_1c_2 - jb_1d_2 \\
 &\quad + jc_1a_2 - kc_1b_2 - c_1c_2 + ic_1d_2 \\
 &\quad + kd_1a_2 + jd_1b_2 - id_1c_2 - d_1d_2 \\
 &= a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 \\
 &\quad + i(a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2) \\
 &\quad + j(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2) \\
 &\quad + k(a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2),
 \end{aligned}$$

unter der Verwendung der Multiplikationstabelle, die wir in Teil (a) ausgerechnet haben. Ein kurzer Blick auf das Ergebnis liefert uns gerade die Definition der Multiplikation, wie sie bereits angegeben worden ist in der Aufgabenstellung. Dieses Ergebnis ist natürlich wieder in  $\mathbb{H}$ .

- Neutrales Element bzgl.  $\cdot$ : Wir fordern ein Element  $e$  aus  $\mathbb{H}$  mit den Eigenschaften  $x \cdot e = x$  für alle  $x \in \mathbb{H}$ . Dieses wird (durch scharfes Hinsehen) erfüllt von dem Element  $e = (1, 0, 0, 0) = 1$ . Einfaches Einsetzen zeigt uns, dass  $(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (1, 0, 0, 0) = (a_1, b_1, c_1, d_1) =: x$  gilt. Ausserdem gilt hier sogar  $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ .
- Inverses Element bzgl.  $\cdot$ : Wieder erinnern wir uns zurück an den Körper der komplexen Zahlen. Dort haben wir gesehen, dass für das inverse Element gilt:

$$(a, b)^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Bisher haben wir ja schon viele Gemeinsamkeiten erlebt zwischen dem Körper der Quaternionen und dem Körper der komplexen Zahlen. Also schienen wir mal einen Schu ins Blaue und wählen als inverses Element in  $\mathbb{H}$ :

$$(a, b, c, d)^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{-c}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{-d}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \right)$$

Multipliziert man nun ein beliebiges Element mit seinem Inversen, ergibt das nun:

$$\begin{aligned}
& (a, b, c, d) \cdot \left( \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \right. \\
& \quad \left. \frac{-c}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{-d}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \right) \\
&= \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{-ab + ab - cd + dc}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \right. \\
& \quad \left. \frac{-ac + bd + ca - db}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{-ad - bc + cb + da}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \right) \\
&= (1, 0, 0, 0) = e_{(\mathbb{H}, \cdot)},
\end{aligned}$$

womit unsere Vermutung sich bestätigt hat.

- Assoziativität bzgl.  $\cdot$ : Erneut wählen wir drei Elemente  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Wir verwenden für diesen Beweis wieder die normalen Rechenregeln des  $\mathbb{R}$  und ändern im späteren Verlauf nicht die Multiplikationsreihenfolgen (da wir ja in Teil (a) schon gesehen haben, dass die Multiplikation nicht kommutativ ist).

$$\begin{aligned}
x \cdot (y \cdot z) &= (a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot ((a_2, b_2, c_2, d_2) \cdot (a_3, b_3, c_3, d_3)) \\
&= (a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2 a_3 - b_2 b_3 - c_2 c_3 - d_2 d_3, \\
& \quad a_2 b_3 + b_2 a_3 + c_2 d_3 - d_2 c_3, \\
& \quad a_2 c_3 - b_2 d_3 + c_2 a_3 + d_2 b_3, \\
& \quad a_2 d_3 + b_2 c_3 - c_2 b_3 + d_2 a_3) \\
&= (a_1(a_2 a_3 - b_2 b_3 - c_2 c_3 - d_2 d_3) - b_1(a_2 b_3 + b_2 a_3 + c_2 d_3 - d_2 c_3) \\
& \quad - c_1(a_2 c_3 - b_2 d_3 + c_2 a_3 + d_2 b_3) - d_1(a_2 d_3 + b_2 c_3 - c_2 b_3 + d_2 a_3), \\
& \quad a_1(a_2 b_3 + b_2 a_3 + c_2 d_3 - d_2 c_3) + b_1(a_2 a_3 - b_2 b_3 - c_2 c_3 - d_2 d_3) \\
& \quad + c_1(a_2 d_3 + b_2 c_3 - c_2 b_3 + d_2 a_3) - d_1(a_2 c_3 - b_2 d_3 + c_2 a_3 + d_2 b_3), \\
& \quad a_1(a_2 c_3 - b_2 d_3 + c_2 a_3 + d_2 b_3) - b_1(a_2 d_3 + b_2 c_3 - c_2 b_3 + d_2 a_3) \\
& \quad + c_1(a_2 a_3 - b_2 b_3 - c_2 c_3 - d_2 d_3) + d_1(a_2 b_3 + b_2 a_3 + c_2 d_3 - d_2 c_3), \\
& \quad a_1(a_2 d_3 + b_2 c_3 - c_2 b_3 + d_2 a_3) + b_1(a_2 c_3 - b_2 d_3 + c_2 a_3 + d_2 b_3) \\
& \quad - c_1(a_2 b_3 + b_2 a_3 + c_2 d_3 - d_2 c_3) + d_1(a_2 a_3 - b_2 b_3 - c_2 c_3 - d_2 d_3)) \\
&= ((a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) a_3 - (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) b_3 \\
& \quad - (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) c_3 - (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) d_3, \\
& \quad (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) b_3 + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) a_3 \\
& \quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) d_3 - (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) c_3, \\
& \quad (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) c_3 - (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) d_3 \\
& \quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) a_3 + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) b_3, \\
& \quad (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) d_3 + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) c_3 \\
& \quad - (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) b_3 + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) a_3) \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2, \cdot (a_3, b_3, c_3, d_3) \\
& \quad a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2, \\
& \quad a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2, \\
& \quad a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) \\
&= ((a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2)) \cdot (a_3, b_3, c_3, d_3) \\
&= (x \cdot y) \cdot z
\end{aligned}$$

Damit haben wir bewiesen, dass  $(\mathbb{H}, \cdot)$  ein Monoid ist. In Aufgabenteil (a) haben wir ja schon gezeigt, dass die Multiplikation hier nicht kommutativ ist. Jetzt fehlt zum Schluss nur noch eine Aussage zu der Distributivität. Dieser geht analog zu den anderen Beweisen (und den wir uns hier ersparen), d.h. es gilt außerdem

$$\begin{aligned}x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z \\(y + z) \cdot x &= y \cdot x + z \cdot x\end{aligned}$$

für alle  $x, y, z \in \mathbb{H}$ . Insgesamt haben wir damit bewiesen, dass  $(\mathbb{H}, +, \cdot)$  alle Bedingungen eines Schiefkörpers erfüllt.

## Aufgabe 2

Mit Polynomdivision erhalten wir:

$$\begin{array}{r}28x^5 - 66x^4 + 60x^3 - 32x^2 + 29x + 5 = (14x^3 - 33x^2 + 23x + 4)(2x^2 + 1) - 7x^2 + 6x + 1 \\- 28x^5 + 66x^4 - 46x^3 - 8x^2 \\ \hline 14x^3 - 40x^2 + 29x + 5 \\- 14x^3 + 33x^2 - 23x - 4 \\ \hline - 7x^2 + 6x + 1\end{array}$$

Weiter gilt:

$$\begin{array}{r}14x^3 - 33x^2 + 23x + 4 = (-7x^2 + 6x + 1)(-2x + 3) + 7x + 1 \\- 14x^3 + 12x^2 + 2x \\ \hline - 21x^2 + 25x + 4 \\ 21x^2 - 18x - 3 \\ \hline 7x + 1\end{array}$$

$$\begin{array}{r}- 7x^2 + 6x + 1 = (7x + 1)(-x + 1) \\ 7x^2 + x \\ \hline 7x + 1 \\ - 7x - 1 \\ \hline 0\end{array}$$

Also ist  $\text{ggT}(a(x), b(x)) = 7x + 1$ .

## Aufgabe 3

Zu zeigen:  $(\mathbb{B}, +, \cdot)$  mit  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$  ist ein K"orper.

- Aus den Verkn"upfungstabellen sieht man, dass Addition und Multiplikation abgeschlossen sind.
- Durch Nachrechnen ergibt sich:

a	b	c	a + b	b + a	b + c	(a + b) + c	a + (b + c)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1

Die Addition ist also assoziativ, das neutrale Element ist die 0, das inverse Element zu 0 ist 0, das inverse Element zu 1 ist 1 und die Addition ist kommutativ. Daraus folgt  $(\mathbb{B}, +)$  ist eine kommutative Gruppe.

- | a | b | c | $a \cdot b$ | $b \cdot a$ | $b \cdot c$ | $(a \cdot b) \cdot c$ | $a \cdot (b \cdot c)$ |
|---|---|---|-------------|-------------|-------------|-----------------------|-----------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0           | 0           | 0           | 0                     | 0                     |
| 0 | 1 | 0 | 0           | 0           | 0           | 0                     | 0                     |
| 1 | 0 | 0 | 0           | 0           | 0           | 0                     | 0                     |
| 1 | 1 | 0 | 1           | 1           | 0           | 0                     | 0                     |
| 0 | 0 | 1 | 0           | 0           | 0           | 0                     | 0                     |
| 0 | 1 | 1 | 0           | 0           | 1           | 0                     | 0                     |
| 1 | 0 | 1 | 0           | 0           | 0           | 0                     | 0                     |
| 1 | 1 | 1 | 1           | 1           | 1           | 1                     | 1                     |

Die Multiplikation ist assoziativ, das neutrale Element ist die 1, das inverse Element zu 1 ist 1 und die Multiplikation ist auch kommutativ. Daraus folgt  $(\mathbb{B} \setminus \{0\}, \cdot)$  ist eine kommutative Gruppe.

- | a | b | c | $a \cdot b$ | $a \cdot c$ | $b + c$ | $a \cdot (b + c)$ | $a \cdot b + a \cdot c$ |
|---|---|---|-------------|-------------|---------|-------------------|-------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0           | 0           | 0       | 0                 | 0                       |
| 0 | 1 | 0 | 0           | 0           | 1       | 0                 | 0                       |
| 1 | 0 | 0 | 0           | 0           | 0       | 0                 | 0                       |
| 1 | 1 | 0 | 1           | 0           | 1       | 1                 | 1                       |
| 0 | 0 | 1 | 0           | 0           | 1       | 0                 | 0                       |
| 0 | 1 | 1 | 0           | 0           | 0       | 0                 | 0                       |
| 1 | 0 | 1 | 0           | 1           | 1       | 1                 | 1                       |
| 1 | 1 | 1 | 1           | 1           | 0       | 0                 | 0                       |

Nach obiger Tabelle und der Kommutativität der Multiplikation  $((b + c) \cdot a = a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c = b \cdot a + c \cdot a)$  gelten auch die Distributivgesetze.

$\Rightarrow (\mathbb{B}, +, \cdot)$  ist ein K"orper.