Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß

Sommersemester 2007

Übungsblatt 12 – Musterlösungen

Aufgabe 1

Wir erinnern uns, dass eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann positiv definit ist wenn

$$x^T Ax > 0 \;\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0.$$

Gegeben sei $C = D + vv^T$ mit einem beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ und einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Ist C ebenfalls pos. definit?

Beweis:
"$\Rightarrow$": Es sei $\{u_1, ..., u_3\}$ eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von C mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_3$. Dann gilt für $x = \sum_{i=1}^3 x_i u_i$ $(x \neq 0)$:

$$\begin{aligned}
x^T Cx &= \left(\sum_{i=1}^3 x_i u_i\right)^T C \left(\sum_{j=1}^3 x_j u_j\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^3 x_i u_i\right)^T \left(\sum_{j=1}^3 x_j C u_j\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^3 x_i u_i\right)^T \left(\sum_{j=1}^3 x_j (D + vv^T) u_j\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^3 x_i u_i\right)^T \left(\sum_{j=1}^3 x_j \underbrace{Du_j}_{\lambda_j u_j} + x_j v_j {v_j}^T u_j\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^3 \lambda_i x_i x_j \underbrace{{u_i}^T u_j}_{=0 \forall i\neq j} + \sum_{i,j=0}^3 x_i x_j \underbrace{{u_i}^T u_j}_{=0 \forall i\neq j} v_j {v_j}^T \\
&= \sum_{i=1}^3 \underbrace{\lambda_i {x_i}^2 |u_i|^2}_{>0} + \sum_{i=1}^3 \underbrace{{x_i}^2 |u_i|^2 {v_i}^2}_{\geq 0} > 0\ .
\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Ist umgekehrt C nicht positiv definit, so existiert ein Eigenwert $\lambda \leq 0$ von C mit zugehörigen Eigenvektor $u \neq 0$. Damit ist

$$u^T Cu = u^T \lambda u = \underbrace{\lambda}_{\leq 0} \underbrace{u^T u}_{>0} \leq 0$$

im Widerspruch zu $x^T Cx > 0$ für alle $x \neq 0$.

Alternative:

Man kann das Ganze auch über den **Rayleigh-Quotienten** beweisen, der wie folgt definiert ist:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$. Dann nennt man

$$R_A(x) := R(x) := \frac{x^T Ax}{x^T x}$$

den Rayleigh-Quotienten.

Beweis:

$$\begin{aligned}
R(x) &= \frac{x^T C x}{x^T x} \\
&= \frac{x^T (D + vv^T) x}{x^T x} \\
&= \frac{x^T D x}{x^T x} + \frac{x^T v v^T x}{x^T x} \\
&= \underbrace{\frac{x^T D x}{x^T x}}_{>0} + \underbrace{\frac{\langle x, v\rangle^2}{\langle x, x\rangle}}_{\geq 0} > 0 \; .
\end{aligned}$$

Wobei D positiv definit ist und das Skalarprodukt symmetrisch.

Aufgabe 2

Schritt 1: Es gilt für die Matrix $A = (2 \quad 2 \quad 1)^\top \in \mathbb{R}^{1\times 3}$, d.h. mit $m = 1$ und $n = 3$:

$$B \;:=\; A^\top A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \det(B - \lambda I) \\
&= (4-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) - 4(4-\lambda) - 4(4-\lambda) - 16(1-\lambda) \\
&= -\lambda^3 + 9\lambda^2
\end{aligned}$$

liefert die Eigenwerte $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Wir sehen also hier, dass der Rang der Matrix A, sowie der Matrix $A^\top A$ gleich 1 ist. Mit den Eigenwerten versuchen wir nun eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ zu konstruieren. Aus der Matrix B können wir für die Spaltenvektoren sofort erkennen, dass sie voneinander linear abhängig sind. Berechnen wir nun

$$(B - 9I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; 0,$$

erhalten wir als Lösung für den ersten Vektor der Basis $w_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^\top$ (man sieht leicht, dass die bereits oben erwähnten Spaltenvektoren nur skalierte Versionen dieses Vektors sind). Da der Rang der Matrix nicht vollständig ist, d.h. die weiteren Eigenwerte gleich 0 sind, müssen wir die anderen Basisvektoren w_2 und w_3 entsprechend wählen, um sie in eine Orthonormalbasis überführen zu können. Eine gute Wahl für w_2 wäre also $w_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, der orthogonal zu w_1 steht, denn es gilt:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \;=\; 2\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 1\cdot 0 = 0.$$

Der dritte Vektor muss dann das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned}
\langle w_1, w_3\rangle &= 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\
\langle w_2, w_3\rangle &= x_1 - x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Wir erhalten als Lösung $x_1 = x_2$ und $x_1 = -4x_3$. Wir wählen nun $x_1 = 1$ und erhalten also als Vektor $w_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}^\top$. Die normierten Eigenvektoren der Orthonormalbasis sind von daher

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ v_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ v_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Unsere Basis V sieht also wie folgt aus:

$$V = [v_1, v_2, v_3] = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Da der Rang von A gleich 1 und $m = 1$ gilt, haben wir nur einen Vektor

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} A v_1, \quad = \quad \frac{1}{3}(3) = \underbrace{(1)}_{\in \mathbb{R}^{1\times 1}},$$

d.h. $U = [u_1] = (1)$.

Schritt 3: Hier ist nichts zu tun, siehe Schritt 2.

Schritt 4: Für die endgültige Zerlegung benötigen wir noch die Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{1\times 3}$, die die Singulärwerte enthält:

$$\Sigma = \text{diag}(S_1) = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Singulärwertzerlegung sieht also wie folgt aus:

$$\begin{aligned} A &= USV^\top \\ &= (1)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(a)

Da M eine untere Dreiecksmatrix ist, sind die Eigenwerte λ_1 und λ_2 die zwei Diagonaleinträge, also

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Für die zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = (v_{1,1}, v_{1,2})^\top$ und v_2 gilt also:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \det(M - \lambda_1 I)\, v_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $v_{1,2} := \mu$, dann ergibt sich aus der zweiten Zeile : $\frac{\sqrt{2}}{2} v_{1,1} = 0 \;\Rightarrow\; v_{1,1} = 0$. Wir haben also

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix},$$

was mit $\mu = 1$ zu

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

führt, was bereits normiert ist!

Analoges gilt da $\lambda_1 = \lambda_2$ auch für v_2, d.h.

$$v_2 = v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b)

Singulärwertzerlegung von M.

Schritt 1:

$$B := M^\top M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Eigenwerte von M als Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$0 = \det(M - \lambda I) = (\frac{3}{2} - \lambda)(1 - \lambda) - \frac{1}{2} = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1.$$

Wir erhalten also

$$\lambda_{1,2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4},$$

also

$$\lambda_1 = 2 \geq \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Nun berechnen wir die Eigenvektoren v_1, v_2 zu den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2$:

$$0 = (B - \lambda_1 I) v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix}$$

Wir setzen $v_{1,2} := \mu$ und erhalten aus der ersten Zeile : $-\frac{1}{2} v_{1,1} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, also $v_{1,1} = \sqrt{2}\mu$. Mit $\mu := 1$ haben wir dann $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, was wir schliesslich zu

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

normieren.
Das gleiche machen wir nun für v_2:

$$0 = (B - \lambda_2\, I)v_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix}$$

Wir setzen $v_{2,1} := \mu$ und erhalten aus der ersten Zeile : $\mu + \frac{\sqrt{2}}{2} v_{2,2} = 0$, also $v_{2,2} = -\frac{2}{\sqrt{2}}\mu$. Mit $\mu := 1$ haben wir dann $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, was wir schliesslich zu

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

normieren.

Da B symmetrisch ist, gilt auch automatisch $v_1 \perp v_2$, d.h. $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Schritt 2: Für $i = 1, 2$ setze $u_i := \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} M v_i$, d.h.

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

und

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt dann auch $u_1 \perp u_2$.

Schritt 3: Entfällt bei uns, da $m - r = 0$!

Schritt 4:

$$U := (u_1, u_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,58 & 0,82 \\ 0,82 & -0,58 \end{pmatrix},$$

$$V := (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,82 & 0,58 \\ 0,58 & -0,82 \end{pmatrix}$$

und

$$\Sigma := \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Singulärwertzerlegung

$$M = U\,\Sigma\,V^\top$$

abgeschlossen.

(c)

Man skizziere einfach die Spaltenvektoren von U und die Zeilenvektoren von V, also ungefähr

$$\begin{pmatrix} 0,58 \\ 0,82 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0,82 \\ -0,58 \end{pmatrix},$$

sowie

$$\begin{pmatrix} 0,82 \\ 0,58 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0,58 \\ -0,82 \end{pmatrix}.$$

Man erkennt dass die Vektoren dann ein Orthonormalsystem aufspannen!