Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß

Sommersemester 2007

Übungsblatt 11 – Musterlösungen

Aufgabe 1

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Gesucht ist eine "Diagonalisierung", d.h., wir suchen 2 Matrizen, und zwar

1. eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, und
2. eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in der Form $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$.

mit der Eigenschaft

$$A = S\,D\,S^{-1}.$$

1. Idee:

A ist offensichtlich **symmetrisch**.
Nach Kapitel 44.8 existiert nun eine **Orthonormalbasis** $\{b_1, b_2\}$, wobei b_1 und b_2 die zwei Eigenvektoren von A sind.
Die zugehörigen Eigenwerte defienieren wir zur späteren Verwendung als λ_1 und λ_2.

Diese Vektoren $b_1 := \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} \end{pmatrix}$ und $b_2 := \begin{pmatrix} b_{2,1} \\ b_{2,2} \end{pmatrix}$ bilden nun die Spalten unserer Matrix S, d.h.

$$S = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} \\ b_{1,2} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \big(b_1 \mid b_2\big)$$

Wir haben also

$$A\,S = A\,\big(b_1 \mid b_2\big) = \big(A\,b_1 \mid A\,b_2\big) \overset{(*)}{=} \big(\lambda_1\,b_1 \mid \lambda_2\,b_2\big)$$

Wobei $(*)$ gilt, da b_1 und b_2 Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2 sind, also gelten muss $A\,b_i = \lambda_i b_i$ für $i \in \{1, 2\}$.

2. Idee:

Man kann sich überzeugen, dass $S \in O(2)$ gilt, d.h.,

$$S^{-1} = S^\top.$$

Wir berechnen damit

$$\begin{aligned}
S^{-1}\,A\,S &= S^\top\,A\,S \\
&= \begin{pmatrix} b_1^\top \\ -- \\ b_2^\top \end{pmatrix} A\,\big(b_1 \mid b_2\big) \\
&= \begin{pmatrix} b_1^\top \\ -- \\ b_2^\top \end{pmatrix} \big(\lambda_1 b_1 \mid \lambda_2 b_2\big) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 b_1^\top b_1 & b_1^\top b_2 \\ b_2^\top b_1 & \lambda_2 b_2^\top b_2 \end{pmatrix} \\
&\overset{(**)}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

wobei $(**)$ gilt wegen der Orthonormalbasis $\{b_1, b_2\}$. Hier haben wir nämlich für das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
b_i^\top\,b_i &= 1 \\
b_i^\top\,b_j &= 0,
\end{aligned}$$

für $i, j \in \{1, 2\}$ mit $i \neq j$.
Die berechnete Matrix ist genau unsere gesuchte Diagonalmatrix D, also

$$S^{-1}\,A\,S = S^\top\,A\,S =: D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Um zu unserem Ausgangsproblem zurück zu kommen:

$$S\,D\,S^{-1} \overset{S\in O(2)}{=} S\,D\,S^\top \overset{\text{Def. } D}{=} S\,(S^\top\,A\,S)\,S^\top \overset{\text{Assoz.}}{=} (S\,S^\top)\,A\,(S\,S^\top) \overset{S\in O(2)}{=} I\,A\,I = A.$$

das heisst also dass wir die gewünschte Zerlegung ereicht haben.

Allerdings bleibt noch die Eigenvektoren b_1 und b_2, sowie die zugehörigen Eigenwerte λ_1 und λ_2 der Matrix A zu bestimmen. Dies tun wir jetzt.

Eigenwerte von A

Wir setzen das charakteristische Polynom $P_A(\lambda) = 0$, d.h.

$$0 \stackrel{!}{=} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0.$$

Dies lösen wir unter Verwendung der p, q-Formel:

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{9} = 2 \pm 3,$$

also

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 5 \\ \lambda_2 &= -1. \end{aligned}$$

Eigenvektoren von A

Zur Bestimmung des Eigenvektors b zum Eigenwert λ suchen wir nichttriviale Lösungen von

$$(A - \lambda I)\, b = 0.$$

Eigenvektor b_1 zu Eigenwert $\lambda_1 = 5$:

$$(A - 5I)\, b_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erkennen, dass wir einen Freiheitsgrad haben. Also setzen wir $b_{1,2} := \mu$.
Dann ergibt die erste Zeile:
$-3b_{1,1} + 3\mu = 0 \;\Rightarrow\; b_{1,1} = \mu.$
Wir wählen einfach $\mu := 1$ und erhalten dann $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Normalisieren liefert schliesslich

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektor b_2 zu Eigenwert $\lambda_2 = -1$:

$$(A + I)\, b_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{2,1} \\ b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir setzen $b_{2,2} := \eta$.
Dann ergibt die erste Zeile:

$3b_{2,1} + 3\eta = 0 \;\Rightarrow\; b_{2,1} = -\eta.$
Wir wählen $\eta := 1$ und erhalten dann $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Normalisieren liefert schliesslich

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis

Unsere gesuchte Zerlegung ergibt sich also als

$$A = S\,D\,S^{-1} = S\,D\,S^{\top}$$

mit

$$S = S^{-1} = S^{\top} = \begin{pmatrix} b_1 \mid b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

und

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

(a)

Orthogonale Matrizen sind normerhaltend d.h. $\|Ax\| = \|x\|$. Für einen Eigenvektor v zum Eigenwert λ gilt also mit $A = A^t$:

$$\langle Av, Av \rangle = \langle v, v \rangle$$

Andererseits ist

$$\langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

(b)

Da $A \in SO(3)$ ist das charakt. Polynom $det(A - \lambda I)$ maximal vom Grad drei. Zudem zerfällt jedes reelle Polynom in lineare und/oder quadratische Faktoren. Ist der Grad des Polynoms ungerade, so ex. ein Linearfaktor $(\lambda - t)$, $t \in \mathbb{R}$ und damit ein reller Eigenwert t. Offensichtlich ist $t = 1$ oder $t = -1$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

drei reelle EW $\Rightarrow$ Produkt der EW'e ist $det(A) = 1$. Dabei können nicht alle -1 sein.$\Rightarrow$ einer ist 1.

ein reeller und zwei konj. komplexe EW'e: $\lambda_1 = t$,$\lambda_2 = \overline{\lambda_3} = z$ mit $tz\overline{z} = 1$. Da $z\overline{z} = |z|^2 \geq 0$ ist $t \geq 0$ und damit $t = 1$.

Der zugehörige Eigenraum stellt die Drehachse dar.

(c)

$A \in O(2)$ bzw. $\in SO(2)$, d.h. das charakt. Polynom ist maximal quadratisch. $\Rightarrow$ es ex. zwei reelle oder 2 konj. komplexe Eigenwerte mit $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = det A = -1$.
Da für zwei konj. komplexe Eigenwerte $\lambda_1 = z, \lambda_2 = \overline{z} \quad z\overline{z} = |z|^2 \geq 0$ wäre, muss λ_1,$\lambda_2 \in \mathbb{R}$ gelten. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ist unzulässig, da sonst $det(A) \neq -1$ und somit würde das ganze keine Spiegelung mehr darstellen. Der zugehörige Eigenraum beschreibt damit die Spiegelungsachse.

Aufgabe 3

Wir überprüfen zunächst, ob

$$D = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

eine Drehung beschreibt:

- $D^T D \stackrel{?}{=} I$:

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 64+16+1 & 8-16+8 & -32+28+4 \\ 8-16+8 & 1+16+64 & -4-28+32 \\ -32+28+4 & -4-28+32 & 16+49+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\det D \stackrel{?}{=} 1$:

$$\det D = \det\left(\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{729}\,(8 \cdot ((-4)\cdot(-4) - 7 \cdot (-8))$$
$$- (4 \cdot (-4) - 7 \cdot (-1))$$
$$+ (-4) \cdot (4 \cdot (-8) - (-4) \cdot (-1)))$$
$$= \frac{1}{729} \cdot (8 \cdot 72 - (-9) + (-4) \cdot (-36)) = \frac{729}{729} = 1$$

D beschreibt also eine Drehung im $\mathbb{R}^3$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ auf der Drehachse wird durch eine Drehung nicht verändert, daher gilt $Dx = x \Leftrightarrow (D - I)x = 0$, wir erhalten als Bedingung für die Drehachse:

$$\begin{aligned}
(D-I)x = 0 \to 9(D-I)x &= 0 \\
&\to \left(\begin{array}{rrr|l} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & -13 & 7 & 0 \\ -1 & -8 & -13 & 0 \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{rrr|l} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & 0 \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{rrr|l} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Wir wählen als dritte Komponente $x_3 := \mu$:

$$\begin{aligned}
&\to \left(\begin{array}{lrr|l} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{lll|r} 1 & 0 & 0 & -5\mu \\ 0 & 1 & 0 & -\mu \\ 0 & 0 & 1 & \mu \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Die Drehachse wird also durch $(-5,-1,1)^T$ erzeugt.