Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk

Dr. Michael Breuß

Sommersemester 2007

Übungsblatt 10 – Musterlösungen

Aufgabe 1

(a)

$O(n) :=\{Menge\ der\ orthogonalen\ n \times n\ Matrizen\}$ soll Untergruppe von $GL(n; \mathbb{R})$ sein. Z.z. ist also:

$$(1)\ E \in O(n)$$
$$(2)\ \forall A \in\ O(n)\ gilt : A^{-1} \in O(n)$$
$$(3)\ \forall A, B \in\ O(n)\ gilt : A \cdot B \in O(n)$$

Beweis:

$(1)\ E^t E = EE^t = E$

$(2)\ Da\ A^{-1} = A^t\ gilt :\ (A^{-1})^t(A^{-1}) = (A^t)^t A^t = AA^t = A^t A = E \Rightarrow A^{-1} \in O(n)$

$(3)\ A, B \in O(n) :\ (AB)^t AB = B^t A^t AB = B^t EB = B^t B = E$

(b)

$SO(n) := \{A \in O(n); det(A) = 1\}$ Untergruppe von $GL(n; \mathbb{R})$.

Beweis: (folgt eigentlich schon direkt aus dem Multiplikationssatz für Determinanten $det(AB) = det(A)det(B)$)

$$(1)\ det(E^t E) = det(EE^t) = detE \cdot detE^t = 1$$
$$(2)\ det((A^{-1})^t A^{-1} = det(A) \cdot det(A^t) = 1 \cdot 1 = 1$$
$$(3)\ det((AB)^t(AB)) = det(B^t A^t AB) = 1$$

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe wollen wir eine Reihe von Funktionen in einer Fourierreihe darstellen und die entsprechenden Fourierkoeffizienten bestimmen. Eine Fourierreihe ist dabei definiert wie in §43.3, wie folgt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(nx) + b_k \sin(nx))$$

Das heißt, wir interessieren uns jetzt fr die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$. Im folgenden verwenden wir die Additionstheoreme, die man aus MFI I; §17.6 her kennt. Weitere Additionstheoreme findet man in Mathematik Büchern, wie "Taschenbuch der Mathematik" (a.k.a. Bronstein), oder z.B. bei wikipedia.de unter http://de.wikipedia.org/wiki/Additionstheoreme. Wir geben im weiteren Verlauf aber die entsprechenden Additionstheoreme an, die wir hier verwenden.

1. $\underline{\sin^4(2x)}$
   Verwendete Additionstheoreme:

   $$\sin^4(x) = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)$$

   Fourierreihe:

   $$\begin{aligned} f(x) = \sin^4(2x) &= \frac{1}{8}(\cos(8x) - 4\cos(4x) + 3) \\ &= \frac{3}{8} - \frac{4}{8}\cos(4x) + \frac{1}{8}\cos(8x) \end{aligned}$$

   Die Koeffizienten sind also $a_0 = \frac{3}{4}$, $a_4 = -\frac{1}{2}$ und $a_8 = \frac{1}{8}$.

2. $\underline{3\sin(5x) - 4\sin^3(7x)}$
   Verwendete Additionstheoreme:

   $$\sin^3(x) = \frac{1}{4}(3\sin(x) - \sin(3x))$$

   Fourierreihe:

   $$f(x) = 3\sin(5x) - 4\sin^3(7x) = 3\sin(5x) - 3\sin(7x) + \sin(21x)$$

   Die Koeffizienten sind also $b_5 = 3$, $b_7 = -3$ und $b_{21} = 1$.

3. $\underline{\cos^2(3x) - \sin^2(3x)}$
   Verwendete Additionstheoreme:

   $$\begin{aligned} \sin^2(x) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \\ \cos^2(x) &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \end{aligned}$$

Fourierreihe:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2(3x) - \sin^2(3x) = \frac{1}{2}(1-\cos(6x)) - \frac{1}{2}(1+\cos(6x)) \\ &= \cos(6x) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind also $a_6 = 1$.

Aufgabe 3

(a)

Gegeben ist eine 2-periodische Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : \ -1 \geq x \geq 0 \\ 1-t & : \ 0 \geq x \geq 1 \end{cases}.$$

Also ist $T = 2$, wobei gilt $f(x+T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Man kann diese nun in eine 2π-periodische Funktion überführen, indem man die Vorschrift auf dem Übungsblatt befolgt:

$$f(t) \mapsto \tilde{f}(x) \quad \text{mit} \quad x := \frac{2\pi}{T}t \ \Leftrightarrow \ t = \frac{T}{2\pi}x.$$

Dass diese Substitution Sinn macht kann man sich an den zwei folgenden Beispielen klar machen:
Am Anfang, bei $t = 0$ haben wir $x = 0$ und wenn $t = T$, d.h. wenn gerade ein Periode vorüber ist, haben wir $x = 2\pi$. Die Funktion $\tilde{f}(x)$ ist also 2π-periodisch.

Berechnen wir nun mit $T = 2$

$$\tilde{f}(x) = f\left(\frac{2}{2\pi}x\right) = f\left(\frac{x}{\pi}\right) = \begin{cases} 1 & : \ -\pi \geq x \geq 0 \\ 1 - \frac{x}{\pi} & : \ 0 \geq x \geq \pi \end{cases}.$$

Zunächst wollen wir uns ein paar (triviale ;-)) Rechenregeln vergegenwärtigen, die wir im Folgenden öfter benötigen werden:

$$\begin{aligned} \sin(k\pi) &= 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ \cos(0) &= 1, \\ \sin(-x) &= -\sin(x), \\ \cos(-x) &= \cos(x), \\ \cos(k\pi) &= \begin{cases} 1 & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ -1 & \text{wenn } k \text{ ungerade} \end{cases} = (-1)^k. \end{aligned}$$

Jetzt können wir die Koeffizienten a_0, a_k und b_k für $k = 1, 2, \ldots$ für die Fourier-Reihe berechnen.

(1)

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\ \ dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1\ \ dx + \int_{0}^{\pi} 1 - \frac{\pi}{x}\ \ dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\Big[x\Big]_{-\pi}^{0} + \Big[x - \frac{x^2}{2\pi}\Big]_{0}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\pi + \Big(\pi - \frac{\pi}{2}\Big)\right) \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

(2) Für $k = 1, 2, \ldots$ haben wir unter Berücksichtigung der Tatsache dass man in $\cos(kx)$ nicht mehr substituieren muss, da $\cos$ bereits 2π-periodisch ist:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\cos(kx)\ \ dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\cos(kx)\ \ dx + \int_{0}^{\pi}\Big(1 - \frac{x}{\pi}\Big)\cos(kx)\ \ dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\Big[\frac{1}{k}\sin(kx)\Big]_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}\Big(1 - \frac{x}{\pi}\Big)\cos(kx)\ \ dx\right).
\end{aligned}$$

Nebenrechnung 1: In einer ersten Nebenrechnung berechnen wir nun das rechte Integral

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\pi}\Big(1 - \frac{x}{\pi}\Big)\cos(kx)\ \ dx &= \int_{0}^{\pi}\cos(kx)\ \ dx - \int_{0}^{\pi}\frac{x}{\pi}\cos(kx)\ \ dx \\
&= \Big[\frac{1}{k}\sin(kx)\Big]_{0}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cdot\cos(kx)\ \ dx.
\end{aligned}$$

Nebenrechnung 2: In einer weiteren Nebenerchnung wenden wir uns nun zu

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\cdot\cos(kx)\ \ dx &\overset{\text{Part.Int.}}{=} \left[\frac{x}{k}\sin(kx)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{k}\sin(kx)\ \ dx \\
&= \frac{\pi}{k}\sin(k\pi) - \left[-\frac{1}{k^2}\cos(kx)\right]_0^\pi \\
&= 0 - \left(-\frac{1}{k^2}\cos(k\pi) + \frac{1}{k^2}\right) \\
&= \frac{(-1)^k - 1}{k^2}.
\end{aligned}$$

Nun können wir **Nebenrechnung 1** fortsetzen:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\cos(kx)\ \ dx &= \frac{1}{k}\sin(k\pi) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^k-1}{k^2}\right) \\
&= \frac{-(-1)^k+1}{\pi k^2} \\
&= \frac{1-(-1)^k}{\pi k^2}.
\end{aligned}$$

Jetzt können wir schliesslich unsere initiale Rechnung beenden:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{1-(-1)^k}{\pi k^2}\right) \\
&= \frac{1-(-1)^k}{\pi^2 k^2}.
\end{aligned}$$

(3) Enstprechend verfahren wir nun mit den b_k's:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\sin(kx)\ \ dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\sin(kx)\ \ dx + \int_0^\pi \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\sin(kx)\ \ dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{0} + \int_0^\pi \sin(kx)\ \ dx - \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi x\cdot\sin(kx)\ \ dx\right)\right).
\end{aligned}$$

Nebenrechnung: Wir berechnen in einer Nebenrechnung

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x \cdot \sin(kx) \; dx &\overset{\text{Part.Int.}}{=} \Big[-\frac{x}{k}\cos(kx)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{1}{k}\cos(kx) \; dx \\
&= -\frac{\pi}{k}(-1)^k - \Big[-\frac{1}{k^2}\sin(kx)\Big]_0^\pi \\
&= -\frac{\pi}{k}(-1)^k - 0 \\
&= -\frac{\pi}{k}(-1)^k.
\end{aligned}$$

Damit beenden wir unsere Rechnung

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k} + \frac{(-1)^k}{k} + \Big[-\frac{1}{k}\cos(kx)\Big]_0^\pi - \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{\pi}{k}(-1)^k\Big)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-1+(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^k+1}{k} + \frac{(-1)^k\pi}{\pi k}\right) \\
&= \frac{(-1)^k\pi}{\pi^2 k} \\
&= \frac{(-1)^k}{\pi k}
\end{aligned}$$

Ergebnis: Unsere Fourier-Reihe ist nun also gegeben durch

$$\begin{aligned}
f(t) &= \tilde{f}(x) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big) \\
&= \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^k}{\pi^2k^2}\cos(kx) + \frac{(-1)^k}{\pi k}\sin(kx)\right).
\end{aligned}$$

<u>Anmerkung:</u> Eigentlich ist $f(x)$ nur auf dem Interval $[-\pi, \pi]$ definiert.
Man kann eine Fourier-Reihe zu f also nur bestimmen, wenn man f periodisch erweitert, was durch simples “Aneinanderhängen” geschehen kann.

(b)

Gegeben ist $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = t^3$.
Durch Aneinanderhängen erhalten wir also eine 2-periodische Funktion, womit wir die

gleiche Situation wie in Teil (a) haben, mit $T = 2$.

Um nun wieder zu einer 2π-periodischen Funktion zu gelangen substituieren wir wieder $t = \frac{T}{2\pi}x$ und erhalten

$$\tilde{f}(x) = f\left(\frac{x}{\pi}\right) = \frac{x^3}{\pi^3}$$

mit $\tilde{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$.

Jetzt berechnen wir noch wie oben die Fourier-Koeffizienten:

(1)

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \;\; dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^3}{\pi^3} \;\; dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^4}{4\pi^3}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^4 - (-\pi)^4}{4\pi^3}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(2) Für $k = 1, 2, \ldots$ erhalten wir unter 3-maliger Anwendung partieller Integration:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\cos(kx)\ \ dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^3}{\pi^3}\cos(kx)\ \ dx \\
&= \frac{1}{\pi^4}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\cdot\cos(kx)\ \ dx \\
&= \frac{1}{\pi^4}\left(\Big[\frac{x^3}{k}\sin(kx)\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{3}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cdot\sin(kx)\ \ dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi^4}\left(0 - \frac{3}{k}\left(\Big[-\frac{x^2}{k}\cos(kx)\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\cos(kx)\ \ dx\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi^4}\left(-\frac{3}{k}\left(-\frac{\pi}{k}(-1)^k - \Big(-\frac{\pi^2}{k}(-1)^k\Big) + \frac{2}{k}\Big(\Big[\frac{x}{k}\sin(kx)\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\ \ dx\Big)\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi^4}\left(\frac{3\pi^2}{k^2}(-1)^k - \frac{3\pi^2}{k}(-1)^k + \frac{2}{k}\Big(0 - \frac{1}{k}\Big[-\frac{1}{k}\cos(kx)\Big]_{-\pi}^{\pi}\Big)\right) \\
&= \frac{1}{\pi^4}\left(\frac{2}{k}\Big(-\frac{1}{k}\Big(-\frac{1}{k}(-1)^k + \frac{1}{k}(-1)^k\Big)\Big)\right) \\
&= \frac{1}{\pi^4}\Big(-\frac{2}{k^2}\cdot 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(3) Entsprechend verfahren wir für

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\sin(kx)\ \ dx \\
&= \frac{1}{\pi^4}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\cdot\sin(kx)\ \ dx \\
&= \frac{1}{\pi^4}\left(\Big[-\frac{x^3}{k}\cos(kx)\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cdot\cos(kx)\ \ dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi^4}\left(-\frac{\pi^3}{k}(-1)^k - \Big(\frac{\pi^3}{k}(-1)^k\Big) + \frac{3}{k}\Big(\Big[\frac{x^2}{k}\sin(kx)\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\sin(kx)\ \ dx\Big)\right) \\
&= \frac{1}{\pi^4}\left(-\frac{2\pi^3}{k}(-1)^k + \frac{3}{k}\Big(0 - \frac{2}{k}\Big(\Big[-\frac{x}{k}\cos(kx)\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\ \ dx\Big)\Big)\right) \\
&= \frac{1}{\pi^4}\left(-\frac{2\pi^3}{k}(-1)^k + \frac{3}{k}\Big(-\frac{2}{k}\Big(-\frac{\pi}{k}(-1)^k + \frac{\pi}{k}(-1)^k + \frac{1}{k}\Big[\frac{1}{k}\sin(kx)\Big]_{-\pi}^{\pi}\Big)\Big)\right) \\
&= \frac{1}{\pi^4}\left(-\frac{2\pi^3}{k}(-1)^k + \frac{3}{k}\Big(-\frac{2}{k}\Big(\frac{1}{k}\cdot 0\Big)\Big)\right) \\
&= \frac{1}{\pi^4}\Big(-\frac{2\pi^3}{k}(-1)^k\Big) \\
&= -\frac{2\cdot(-1)^k}{\pi k}.
\end{aligned}
$$

Ergebnis: Für die Fourier-Reihe erhalten wir somit

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \tilde{f}(x) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{2\cdot(-1)^k}{\pi k}\sin(kx)\right).
\end{aligned}
$$