Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß

Sommersemester 2007
Ausgabe: 20.04.2007
Abgabe: 27.04.2007 **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Gegeben sei ein reguläres Tetraeder; seine Ecken seien mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet. Es werden echte Drehungen im Raum betrachtet, die das Tetraeder auf sich selbst abbilden (*echte Drehungen* bedeutet, dass die Orientierung erhalten bleibt, also keine Spiegelungen vorkommen dürfen). Jede derartige Drehung kann durch die von ihr bewirkte Permutation der vier Tetraederecken beschrieben werden.

(a) Notieren Sie alle echten Drehungen des Tetraeders (als Permutationen der Ecken). Diese Drehungen bilden eine Gruppe (Beweis <u>nicht</u> verlangt!). Geben Sie das neutrale Element dieser Gruppe an.

(b) Wenn man ein Paar gegenüberliegender Kanten des Tetraeders wählt und durch die Mittelpunkte dieser beiden Kanten eine Drehachse legt, so bildet die Drehung mit dem Drehwinkel $180°$ um diese Achse das Tetraeder auf sich selbst ab. Geben Sie alle diejenigen Drehungen aus Teilaufgabe (a) an, die auf diese Art erhalten werden können. Zeigen Sie, dass diese Drehungen zusammen mit dem neutralen Element eine Untergruppe der Gruppe aus (a) bilden.

(8 Punkte)

Aufgabe 2

Diese Aufgabe illustriert den Homomorphiesatz für Gruppen.

Gegeben sei die alternierende Gruppe

$$A_4 = (\{\mathrm{id}, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}, \circ) ,$$

wobei $\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ die identische Permutation ist und die übrigen Permutationen in Zyklenschreibweise angegeben sind.

Weiter sei die Gruppe

$$\mathbb{Z}_3 = (\{[0], [1], [2]\}, +)$$

sowie der Homomorphismus $f : A_4 \to \mathbb{Z}_3$ mit

$$\begin{array}{rrrr} f(\mathrm{id}) = [0], & f((123)) = [1], & f((132)) = [2], & f((124)) = [2], \\ f((142)) = [1], & f((134)) = [1], & f((143)) = [2], & f((234)) = [2], \\ f((243)) = [1], & f((12)(34)) = [0], & f((13)(24)) = [0], & f((14)(23)) = [0] \end{array}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie den Kern von f.

(b) Bestimmen Sie die Elemente der Faktorgruppe $A_4/\mathrm{Ker}(f)$.

(c) Geben Sie den Isomorphismus von $A_4/\mathrm{Ker}(f)$ auf $\mathbb{Z}_3$ explizit an.

(10 Punkte)

Aufgabe 3

Seien H, K und L Halbgruppen. Abbildungen zwischen Halbgruppen sind analog zu Abbildungen zwischen Gruppen definiert. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\varphi : H \to K$ und $\psi : K \to L$ seien Homomorphismen. Dann ist $\psi \circ \varphi : H \to L$ ein Homomorphismus.

(b) Sei $\varphi : H \to K$ ein Isomorphismus. Dann ist $\varphi^{-1} : K \to H$ ebenfalls ein Isomorphismus.

(6 Punkte)