Mathematik für Informatiker II

Dr. Martin Welk
Dr. Michael Breuß

Sommersemester 2007

Übungsblatt 1 – Musterlösungen

Aufgabe 1

(a)

Es existieren 12 echte Drehungen des Tetraeders, die wir als $\sigma_1, \ldots \sigma_{12}$ bezeichen, und die in Zyklenschreibweise wie folgt aussehen, wenn wir die obere Ecke des Tetraeders mit 1, die linke untere Ecke mit 2, die mittlere untere Ecke mit 3 und die rechte untere Ecke mit 4 bezeichen:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = (1)(2)(3)(4), \quad & \sigma_2 = (243), \quad & \sigma_3 = (234), \\ \sigma_4 = (134), \quad & \sigma_5 = (143), \quad & \sigma_6 = (142), \\ \sigma_7 = (124), \quad & \sigma_8 = (123), \quad & \sigma_9 = (132), \\ \sigma_{10} = (14)(23), \quad & \sigma_{11} = (13)(24), \quad & \sigma_{12} = (12)(34). \end{aligned}$$

Man kann zeigen dass das neutrale Element der Gruppe $G := (S, \circ) := (\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{12}\}, \circ)$ gleich $\sigma_1 = (1)(2)(3)(4) := id$ ist.

(b)

Die Menge aller Drehungen um 180^o ist gegeben durch

$$S' := \{\sigma_{10} = (14)(23), \sigma_{11} = (13)(24), \sigma_{12} = (12)(34)\}.$$

Um zu zeigen dass $U := (S' \cup id, \circ)$ eine Untergruppe von von G ist überprüfen wir 3 Bedingungen:

1. **Teilmenge** : $S' \cup id \subset S$:
   Trivialerweise erfüllt, da $\sigma_{10} \in S, \sigma_{11} \in S, \sigma_{12} \in S$ und $id \in S$.
2. **Abgeschlossenheit** : $s, t \in S' \cup id \Rightarrow s \circ t \in S' \cup id$:

$$\begin{aligned} s' \circ id &= s' \in S' \cup id \\ (14)(23) \circ (13)(24) &= (12)(34) \in S' \cup id \\ (14)(23) \circ (12)(34) &= (13)(24) \in S' \cup id \\ (13)(24) \circ (12)(34) &= (14)(23) \in S' \cup id. \end{aligned}$$

   Da man zeigen kann dass G eine kommutative Gruppe ist genügen die Fälle, die wir gerade betrachtet haben.

3. **Inverses Element** : $s \circ s^{-1} \in S' \cup id$:
   Es gilt $s^{-1} = s$, da $s \circ s = s = id = e$.
   Trivialerweise gilt dann $\forall s \in S' \cup id : s \circ s^{-1} = s \circ s = s \in S' \cup id$.

$\square$

Aufgabe 2

(a)

Sei $f : A_4 \to \mathbb{Z}_3$ und e das neutrale Element in $\mathbb{Z}_3$, also $e = [0]$. Dann gilt für den Kern von f

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{a \in A_4 \mid f(a) = e\} \\ &= \{a \in A_4 \mid f(a) = [0]\} \\ &= \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}. \end{aligned}$$

(b)

Für die Faktorgruppe $A_4/Ker(f)$ gilt

$$\begin{aligned} A_4/Ker(f) &= \{\{a \in A_4 \mid f(a) = [0]\}, \{a \in A_4 \mid f(a) = [1]\}, \{a \in A_4 \mid f(a) = [2]\}\} \\ &= \{id \circ Ker(f), (123) \circ Ker(f), (132) \circ Ker(f)\} \\ &= \{\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}, \{(142), (243), (123), (134)\}, \{(132), (143), (124), (234)\}\} \end{aligned}$$

(b)

Für die Faktorgruppe $A_4/Ker(f)$ gilt

$$\begin{aligned} A_4/Ker(f) &= \{\{a \in A_4 \mid f(a) = [0]\}, \{a \in A_4 \mid f(a) = [1]\}, \{a \in A_4 \mid f(a) = [2]\}\} \\ &= \{id \circ Ker(f), (123) \circ Ker(f), (132) \circ Ker(f)\} \\ &= \{\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}, \{(142), (243), (123), (134)\}, \{(132), (143), (124), (234)\}\} \end{aligned}$$

(c)

Wir bezeichnen den Isomorphismus zwischen $A_4/Ker(f)$ und $\mathbb{Z}_3$ als $g : A_4 \to \mathbb{Z}_3$, mit

$$\begin{aligned} g(id \circ Ker(f)) &= [0] \\ g((123) \circ Ker(f)) &= [1] \\ g((132) \circ Ker(f)) &= [2]. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a)

Wir zeigen dass $\psi \circ \phi$ die Homomorphismus-Eigenschaft besitzt, d.h. für beliebige $x, y \in H$ gilt

$$(\psi \circ \phi)(x \cdot y) = (\psi \circ \phi)(x) \bullet (\psi \circ \phi)(y), \tag{1}$$

mit den Verknüpfungen
$\cdot : H \times H \to H, * : K \times K \to K$ und $\bullet : L \times L \to L$.
Wir zeigen nun das $\psi \circ \phi$ die Gleichung 1 erfüllt:

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \phi)(x \cdot y) &= \psi(\phi(x \cdot y)) && \text{, wegen Definition } \circ \\
&= \psi(\phi(x) * \phi(y)) && \text{, da } \phi \text{ Homomorphismus} \\
&= \psi(\phi(x)) \bullet \psi(\phi(y)) && \text{, da } \psi \text{ Homomorphismus} \\
&= (\psi \circ \phi)(x) \bullet (\psi \circ \phi)(y) && \text{, wegen Definition } \circ .
\end{aligned}$$

□

(b)

Um zu zeigen dass ϕ^{-1} ein Isomorphismus ist müssen wir zeigen dass ϕ^{-1} bijektiv ist und dass ϕ^{-1} ein Homomorphismus ist.

Das erstere ist trivialerweise erfüllt, da ϕ als Isomorphismus bijektiv ist und daher auch die Umkehrabbildung ϕ^{-1} bijektiv sein muss.

Für das letztere müssen wir also noch wie in Teil (a) die Homomorphismus-Eigenschaft zeigen.
Zur einfachereren Notation definieren wir

$$\begin{aligned}
u &:= \phi^{-1}(x \cdot y) \\
v &:= \phi^{-1}(x) \bullet \phi^{-1}(y),
\end{aligned}$$

mit beliebigen $x, y \in K$ und den Verknüpfungen
$\cdot : K \times K \to K$ und $\bullet : H \times H \to H$.
Es genügt uns also $u = v$ zu zeigen, was wir nun tun.

Da ϕ^{-1} Umkehrabbildung von ϕ ist haben wir $\phi(u) = x \cdot y$.
Betrachten wir nun

$$\begin{aligned}
\phi(v) &= \phi(\phi^{-1}(x) \bullet \phi^{-1}(y)) && \text{, wegen Definition } v \\
&= \phi(\phi^{-1}(x)) \cdot (\phi(\phi^{-1}(y))) && \text{, da } \phi \text{ Homomorphismus} \\
&= x \cdot y && \text{, wegen Definition Umkehrabbildung} \\
&= \phi(u) && \text{, siehe oben!.}
\end{aligned}$$

Damit haben wir $\phi(v) = \phi(u)$ gezeigt, welches wir nun benutzen können um schliesslich $u = v$ zu zeigen:

$$\begin{aligned} u &= \phi^{-1}(x \cdot y) \quad \text{, wegen Definition } u \\ &= \phi^{-1}(\phi(v)) \quad \text{, wegen } \phi(v) = x \cdot y \text{ siehe oben!} \\ &= v \quad \text{, wegen Definition Umkehrabbildung.} \end{aligned}$$

$\square$