Kapitel 19

Binomialkoeffizienten und die Binomialreihe

19.1 Motivation

Binomialkoeffizienten spielen eine große Rolle

- in der Kombinatorik, wenn man die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge sucht
- beim binomischen Satz zur Berechnung von $(a+b)^n,\ n \in \mathbb{N}$.
- in der Potenzreihendarstellung von $(1+x)^\alpha$ für $|x| < 1$.

19.2 Definition: *(Binomialkoeffizient)*

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

$$\binom{n}{k} = \left\{ \begin{array}{l} \textit{Anzahl der } k\textit{-elementigen Teilmengen} \\ \textit{einer } n\textit{-elementigen Menge} \end{array} \right.$$

den Binomialkoeffizient n über k.

Bemerkung: Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} &= 1, \\ \binom{n}{1} &= n, \\ \binom{n}{k} &= 0 \qquad \text{für } k > n \end{aligned}$$

Der folgende Satz liefert eine rekursive Beschreibung der Binomialkoeffizienten.

19.3 Satz: *(Rekursionsbeziehung für Binomialkoeffizienten)*

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq k$. Dann gilt:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0 \text{ oder } k = n \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis:

Aussage klar für $k = 0$ oder $k = n$. Sei also $0 < k < n$. Sei $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Die k-elementigen Teilmengen N von M zerfallen in 2 Klassen:

(a) Mengen N mit $x_n \notin N$. Diese entsprechen den k-elementigen Teilmengen von $M \setminus \{x_n\}$. Davon gibt es nach Def. 19.2 $\binom{n-1}{k}$ Stück.

(b) Mengen N mit $x_n \in N$. Sie entsprechen den $(k-1)$-elementigen Teilmengen von $M \setminus \{x_n\}$. Davon gibt es $\binom{n-1}{k-1}$ Stück.

Insgesamt gilt daher:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

$\square$

19.4 Pascal'sches Dreieck

Satz 19.3 erlaubt die Berechnung von Binomialkoeffizienten mit Hilfe eines Dreiecks, in dem jeder Koeffizient als Summe der beiden schräg darüber stehenden Koeffizienten berechnet wird.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} = 1 & & & \\
 & & \binom{1}{0} = 1 & & \binom{1}{1} = 1 & & \\
 & & \searrow & & \swarrow & & \\
 & \binom{2}{0} = 1 & & \binom{2}{1} = 2 & & \binom{2}{2} = 1 & \\
 & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \\
\binom{3}{0} = 1 & & \binom{3}{1} = 3 & & \binom{3}{2} = 3 & & \binom{3}{3} = 1
\end{array}$$

Für große n ist diese Rekursionsformel ineffizient. Gibt es eine direkte Formel?

19.5 Satz: *(Direkte Formel für Binomialkoeffizienten)*

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$. Dann gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dabei bezeichnet $k! := k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1$ *die Fakultät von k. Man setzt* $0! := 1$.

Beweis:

Vollständige Induktion

19.6 Beispiel:

Wie viele Möglichkeiten gibt es im Lotto, 6 aus 49 Zahlen auszuwählen?

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13.983.816$$

Dabei spielt die Reihenfolge der 6 Zahlen keine Rolle.

Was hat das mit Analysis zu tun ?

19.7 Satz: *(Binomialsatz)*

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

19.8 Beispiel:

(a)

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \binom{2}{0} a^0 b^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^2 b^0 \\ &= b^2 + 2ab + a^2\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \binom{3}{0} a^0 b^3 + \binom{3}{1} a^1 b^2 + \binom{3}{2} a^2 b^1 + \binom{3}{3} a^3 b^0 \\ &= b^3 + 3ab^2 + 3a^2 b + a^3\end{aligned}$$

19.9 Beweis des Binomialsatzes

Wir verwenden das Prinzip der Indexverschiebung.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} \qquad (*)$$

um den Binomialsatz mit vollständiger Induktion zu beweisen.

Induktionsanfang:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$
$$= (a+b)^0.$$

Induktionsannahme: Es sei

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n.$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) \\
&\overset{\text{Ind. Ann}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) (a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&\overset{\text{abspalten}}{=} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n-k+1} + \\
&\quad \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} a^{n+1} b^0 + \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} a^0 b^{n+1} \\
&\overset{19.3}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \\
&\quad \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

□

19.10 Binomialreihe: Motivation

Aus dem Binomialsatz folgt für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(1+x)^n = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n.$$

Kann man eine ähnliche Beziehung auch für $(1+x)^\alpha$ gewinnen, wenn α keine natürliche Zahl ist? Hierzu müssen wir den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)$$

verallgemeinern zu

$$\boxed{\binom{\alpha}{k} := \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)} \qquad \alpha \in \mathbb{R}, k \geq 0.$$

Dann kann man zeigen

19.11 Satz: *(Binomialreihe)*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $-1 < x < 1$. Dann hat $(1+x)^\alpha$ die Potenzreihenentwicklung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

Bemerkung: Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ bricht die Reihe wegen $\binom{\alpha}{n} = 0 \quad \forall \alpha > n$ ab (vgl. 19.2 auf Seite 145) .

19.12 Konvergenz der Binomialreihe

Sei $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ und $x \neq 0$. Dann gilt mit dem Quotientenkriterium für $a_k := \binom{\alpha}{k}x^k$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k}\right| \\
&= \left|\frac{\frac{1}{(k+1)!}\prod_{j=0}^{k}(\alpha-j)}{\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)}\right| \cdot |x| \\
&= \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| \cdot |x|.
\end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = |-1| = 1$ ist $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x|$.
Damit konvergiert (a_k) nach dem Quotientenkriterium für $|x| < 1$.

19.13 Beispiele

(a) $\alpha = -1$:

$$\begin{aligned}
\binom{-1}{k} &= \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(-1-j) = \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-k) = (-1)^k \\
\Rightarrow \frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k \qquad \text{für } |x| < 1.
\end{aligned}$$

Die geometrische Reihe ist also ein Spezialfall der Binomialreihe.

(b) $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\binom{\frac{1}{2}}{0} &= \underbrace{\frac{1}{0!}}_{1}\underbrace{\prod_{j=0}^{-1}(\frac{1}{2}-j)}_{1} = 1 \\
\binom{\frac{1}{2}}{1} &= \frac{1}{1!}\prod_{j=0}^{0}(\frac{1}{2}-j) = \frac{1}{2} \\
\binom{\frac{1}{2}}{2} &= \frac{1}{2!}\prod_{j=0}^{1}(\frac{1}{2}-j) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} \\
\Rightarrow \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3) \qquad \text{für } |x| < 1.
\end{aligned}$$

Derartige Potenzreihendarstellungen sind nützlich zur numerischen Approximation der Wurzelfunktion.